大学数学解题艺术

胡适耕 编著



湖 南 大 学 出 版 社
1997 年 · 长沙

内 容 简 介

本书以大学数学的基本内容为素材，着重介绍大学数学解题的通用原则、主要方法与技巧，并通过1 000个例题阐释所介绍方法的具体应用，其中不少解题的思路和方法令人拍案叫绝。

本书语言生动，编排独具匠心，循序渐进，具有很强的引导性和启迪性。尤其特别的是，它把那些原本平凡然而恰恰因其平凡而常常被忽略的思路和方法整理成通用而高效的系统解题方法奉献给读者。读完此书，你将发现其实你本来就有足够的能力面对那些繁难的数学问题；昔日让人痛苦的数学解题如今会变得饶有兴趣并且引人入胜。你从本书中获得的甚至将不仅仅是解题的收益。

大学数学解题艺术

Daxue Shuxue Jieti Yishu

胡适耕　编著

责任编辑　曾　成

装帧设计　吴颖辉

出版发行　湖南大学出版社

社址　长沙市岳麓山　邮码　410082

电话　0731－8821691　0731－8821315

经　　销　湖南省新华书店

印　　装　湖南大学印刷厂

开　　本　850×1168　32开　印张　10　字数　242千

版　　次　1997年3月第1版　1997年3月第1次印刷

印　　数　1－5 000册

书　　号　ISBN　7－81053－058－5/O1・1

定　　价　12.00元

前　言

你大概有过这样的体验；一道难对付的数学题使你伏案终日，绞尽脑汁而无以为计，你在沮丧之余，可能会坚决附和一种流行的看法：天下再没有比解数学题更令人惶恐、烦躁的事了！不是吗，当人们遇到棘手的事时，常常愤愤地说：这简直如同解数学题一样！

不！事情根本不是这样，数学中固然有不少难题，然而，今日大学生在完成其必要的数学训练时需解决的问题，不仅无登天之难，而且大多具有很强的规律性，或许比其它课程的问题更好解决，如果你能掌握其中的规律，必定茅塞顿开，疑难尽释；你会感到解数学题不仅不是一种痛苦，而且还是一件乐事——这就是本书要告诉你的。

你看了本书的标题"解题的艺术"，必定会满怀希望从书中获得某些"秘诀"，使得解题时化险为夷。你确实会发现，本书提供的许多方法有简捷明快的效果，然而，这些方法完全基于合理的，甚至是很平常的思考，并不具备特别的技巧，因而很难说是秘诀。须知，真正有价值的富有生命力的方法，恰是那些呈现明显规律性因而有广泛应用的方法，这种方法所依据的原理往往极其简单，以至因不引人注意而被忽略，使得本应是很普通的方法竟成了秘诀，一旦这些方法被透彻了解与掌握，就会成为常规的方法. 反之，一种仅仅用于解决个别问题的方法，无论构思如何巧妙，也只有孤立的价值，这种"秘诀"，不在本书讨论之列。如此说来，本书所称的"解题艺术"，乃"通用而高效的解题方法"之谓也. 唯其通用，才值得推广；唯其简捷明快，才显示出"艺术"魅

力。本书作者曾在所著《现代分析引论》一书中宣称："简单即美，似乎应成为数学的格言。"此处不妨重申：数学思维的艺术，首先体现在"简单"之中。

本书将解题艺术建立在四大基本原则之上：简化原则；对称性原则；转化原则；RMI 原则，对这些原则的系统阐释，自然构成本书的四章，它们是本书的核心内容。为了对主要原则的阐述有所准备，本书第一、二两章分别论述了"演算"与"证明"两大类问题的特点与解法概要。最后两章讨论不等式与等式这两个专题，它们对于大学数学训练的重要性是勿庸置疑的，而且用于解释四大基本原则的具体应用亦很合适。

本书理所当然地包含了大量的例题，这一方面是为了尽可能覆盖大学数学的大部分内容，使读者更多地获益；同时也是为了强调：本书所提倡的方法有足够的通用性，当你看到一种方法能有效地用于十个以上的例题时，你无疑会有信心将此方法用到更多的问题上去。仅有一部分例题作了较详细的解答，其它例题则只有提示或答案，详细地解出这些问题，正是读者自我测试的良好机会，为此你不免得费点时间。为了掌握解题这门艺术，你大概会乐意付出这点代价。

本书各章之间的相互联系与交织是如此明显，以致常常难于决定某些内容该置于何处才最为合适。首先，几个基本原则就远不是相互独立的，例如，对称性原则当然是简化原则的一种形式；而简化必然是某种转化。其次，一个稍复杂的问题的求解往往需兼用多种方法，这种情势使你注定要面对穿插交错的图景，它确有些令人茫然失据，一时难以理出脉络分明的头绪。但得立即提醒你，绝对不应为此而烦恼！如果你在细心探究一道题的解法时发现，它既体现了对称性原则，又体现了转化原则；它既具典型的逻辑特征，又具分明的直观形态，……你不为新体验到的

事物的多样性与丰富性而激动吗？况且，无论我们喜欢与否，事物本身就是这样的！我们永远也不要指望设计出一些各自独立的范畴，使得所考察的问题各有所属而互无纠葛。数学乃至整个科学，原本是一个无法分割的统一体，对于部分的理解与掌握应随时与某种整体的方法论体系联系起来。

最后得为使用本书的读者提点具体建议了。如果你已学过一段高等数学，而且对其中的基本概念与定理有初步的了解，只是感到自己手中用来对付大量习题的武器不够锐利，那么，本书正好用得上！例如，你从本书第四章～第八章可找到大量合你胃口的材料。如果你按目次找到了合适的章节，且依本书的建议解答了有关问题，那么你将发现，正在进行的课程中的那些习题对于你已不算什么威胁了。如果你已学过大学数学课程，但对于它的方法并无系统与概括的了解，因而在一定难度的数学题面前仍然穷于应付，那么，本书对于你正好合适！本书除了提供许多令你耳目一新的方法之外，还将帮助你将自己几年中囫囵吞下的大量数学知识理出点头绪来。如果你在数学上非初出茅庐之辈，而已在教大学生们解数学题了，那么，对于“解题的艺术”必定自有一番见地，本书落入知音之手，那就更值得庆幸了。

作者曾作为主笔参与撰写《高等数学概要》与《高等数学典型问题100类》两书。正是这两本书的读者的鼓励与愿望促使作者决心写出目前这本专论方法的书。因此，作者理所当然地要首先感谢广大读者的支持。其次，作者也衷心感谢湖南大学出版社领导及编辑为本书顺利出版而作的大量努力。

作　者

1996年4月1日

目　　次

第一章　数学演算

数学当然离不开一定的演算．事实上，在今日公众心目中，数学仍不过是算术的某种延续，数学家不过是比常人更会"算"一些罢了．我们知道，你已有一大堆高深数学概念在胸，正急于奋起反驳视数学为算术的浅薄之见．但我们得劝阻你：且慢！公众所言其实并无大错．我们不必讳言，现代数学在一定意义上确是算术的延续．当然，这一延续已如此远离其本源，以至初看起来几无共同之处了．你不防回忆一下，学习大学数学的主要事情不正是"算"某些东西吗？当然不再是初等数学中的简单的加减乘除，而是算极限，算微分或积分等等，总之，是一系列演算．然而，对"演算"一词应理解得更宽泛些，使之能包括诸如求切线、求级数展开式、求极值点一类的问题．凡是按一定规则求得某个数学对象（如极限、导数、积分、和式、Taylor 级数、逆矩阵等等）的操作，都应列入数学演算．这样，演算的重要性就不言而喻了．你现在该会同意，学习数学的首要任务仍然是学会如何"算"，且"算"得既快又好．或者可以说，数学的艺术在一定程度上仍然是"演算"的艺术．那么，对这门被人推崇备至的艺术，本书将说些什么呢？让我们从最基本的事实说起吧．

1.1　演算过程分析

首先浏览一些简单例子．

1　求 $l=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1+\sin x)/x\cos x$.

解　利用极限运算的性质分解计算：

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=1\cdot(1+1)=2.$$

2　设 $y(x)=a^x x^a(a,x>0)$，求 y'.

解　利用 Leibniz 规则及 $(a^x)'$ 与 $(x^a)'$ 的公式：

$$y'=(a^x)'x^a+a^x(x^a)'=a^x x^{a-1}(x\ln a+a).$$

3　求 $I=\int_0^1\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$.

解　利用分部积分规则：

$$I=x\operatorname{arctg}x\,|_0^1-\int_0^1 x(1+x^2)^{-1}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

4　已知 $\mathrm{d}u=(e^y+x^{-1}y^2)\mathrm{d}x+(xe^y+2y\ln x)\mathrm{d}y$，求 u.

解　将 $\mathrm{d}u$ 的表达式重新组合：

$$\mathrm{d}u=(e^y\mathrm{d}x+xe^y\mathrm{d}y)+(x^{-1}y^2\mathrm{d}x+2y\ln x\mathrm{d}y)$$
$$=\mathrm{d}(xe^y)+\mathrm{d}(y^2\ln x)=\mathrm{d}(xe^y+y^2\ln x),$$

因此 $u=xe^y+y^2\ln x+C$.

5　求 $f(x)=x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{-1}$ 关于 x 的幂级数展开式.

解　首先分解 $f(x)$，然后分项展开之：

$$f(x)=\frac{x(1+x)}{1-x^4}=\frac{x}{1-x^4}+\frac{x^2}{1-x^4}$$
$$=\Sigma_0^\infty x^{4n+1}+\Sigma_0^\infty x^{4n+2}.$$

6　求 $S=\Sigma_0^\infty(n+1)2^n/n!$.

解　首先分解级数，然后利用已知展开式 $e^x=\Sigma_0^\infty x^n/n!$ 分项求和：

$$S=\Sigma_1^\infty 2^n/(n-1)!+\Sigma_0^\infty 2^n/n!=2e^2+e^2=3e^2.$$

7　求微分方程$(y^4 - 3x^2)\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}x = 0$的通解.

解　将原方程改写成线性方程的标准形状：

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y} = \frac{6x^2}{y} - 2y^3,$$

然后依已知的通解公式得$x^2 = Cy^6 + y^4$.

8　设$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, r = |\boldsymbol{r}|$,求$u = \nabla \cdot (e^r\boldsymbol{r})$.

解　用关于散度的 Leibniz 公式：

$$\begin{aligned} u &= (\nabla e^r) \cdot \boldsymbol{r} + e^r \nabla \cdot \boldsymbol{r} \\ &= e^r r^{-1} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} + 3e^r \\ &= (r + 3)e^r. \end{aligned}$$

你或许会说上面这几个例子太平淡无奇了.可是,要是你稍微留点心,便会从并列在一起的平凡例子中观察出某些共同规律来.以上各题所求的对象当然很不一样,但其求解过程都依赖于一定的规则与一定的标准结论.例如,

题 1 用到极限的四则运算规则与标准的极限：

$$\lim_{x\to 0} x^{-1}(e^x - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

题 2 用到 Leibniz 微分规则与标准的导数公式：

$$(a^x)' = a^x \ln a, (x^a)' = ax^{a-1};$$

题 6 用到级数的加法规则与标准的展开式

$$e^x = \Sigma_0^\infty x^n / n!.$$

如此等等.

一般地说,数学演算过程包括如下三要素：

(i)　演算对象,如极限、积分、级数等,它由问题所给定.

(ii)　演算规则,如极限运算规则,微分规则,积分规则等,它由一定的数学理论所提供.

(iii)　基本公式,如基本极限,基本初等函数的导数与原函

数公式，基本展开式等.

对一特定演算（例如微分）来说，演算规则与基本公式都为数不多，不难熟记在心. 表 1.1 是演算规则与基本公式的一个汇总（因空间限制而作了省略）.

表 1.1　演算规则与基本公式汇总

演算	演　算　规　则	基　本　公　式
求极限	$\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$ $\lim(uv) = \lim u \lim v$ $\lim f(u) = f(\lim u)$（f 连续） $\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{u'}{v'}$	$\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to +0} x^x = 1$
求导	$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(uv)' = u'v + uv'$ $(f(u))' = f'(u)u'$	$(x^a)' = ax^{a-1}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\sin x)' = \cos x$
求原函数	$\int (u \pm v)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x \pm \int v\mathrm{d}x$ $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$ $\int f(u)\mathrm{d}u = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$	$\int x^a\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$
求幂级数展开式	$\Sigma a_n x^n \pm \Sigma b_n x^n = \Sigma(a_n \pm b_n)x^n$ $\Sigma a_n x^n \Sigma b_n x^n$ $= \Sigma(a_n b_0 + \cdots + a_0 b_n)x^n$ $(\Sigma a_n x^n)' = \Sigma n a_n x^{n-1}$ $\int_0^x (\Sigma a_n t^n)\mathrm{d}t = \Sigma \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$	$(1+x)^\alpha = 1 +$ $\Sigma_1^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ $e^x = \Sigma_0^\infty x^n/n!$ $\sin x =$ $\Sigma_0^\infty (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ $\ln(1+x) = \Sigma_1^\infty (-1)^{n-1}x^n/n$

在简单的情况下，直接应用演算规则与基本公式即可得出演算结果（如题 2）. 但在更多的情况下，需要对演算对象作适当分解或变形，方可应用演算规则与基本公式（如题 1，题 4 ～ 题 7）. 数学演算的过程，实质上是依据演算规则完成一系列转化，使得最终能组合基本公式得出演算结果. 演算的复杂程度不过是转化步骤的多寡而已.

为顺利完成演算而需熟记的规则与公式亦有一定变通余地. 例如，规则"$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$"可直接使用，但亦可从 Leibniz 规则导出：$(u/v)' = u'(1/v) + u(v^{-1})' = u'v^{-1} - uv'v^{-2}$；可将$\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}\ln(1+x) = 1$，$(\cos x)' = -\sin x$ 作为基本公式使用，但亦可注意到它们能从其它公式导出：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1;$$

$$(\cos x)' = \left(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

1.2 通用初等变形

读了上节之后，你可能会同意解算题原来很简单——应用"规则"与"公式"而已. 但实际做起来何以经常不易呢？问题往往出在应用规则与公式之前对算式应作的变形上. 完成这步工作的方法与形式变化万端，是很难规范化的. 实际上，在这一点上我们要做的事情大多既常见又初等，只是很少综合地考虑罢了. 本节意在作某种概括，且称之为"通用初等变形". "通用者，乃适用于多种场合"之谓也.

1.2.1 和式分解

若能写出分解式 $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则可将施于 a 的演

算(如求极限、微分或积分等)转化为施于诸 a_i 的演算，后者可能较简单.

最主要的分解是"部分分式分解". 每个真分式(分子次数低于分母次数)有唯一分解：

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+b^2)^n}=\frac{A_m}{(x-a)^m}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}$$
$$+\frac{C_nx+D_n}{(x^2+b^2)^n}+\cdots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+b^2}$$
$$+\cdots, \tag{1.2.1}$$

系数 A_i,C_j,D_j 由通常的"待定系数法"确定，具体做法由下面的例题演示.

9 设 $f(x)=1/(x^2-3x+2)$，求 $f^{(n)}(x)$ 及 f 关于 x 的幂级数展开式.

解 直接看出 $f(x)=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}$，于是

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$$
$$=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right];$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-2^{-1}x}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n\quad(|x|<1).$$

10 求 $I=\int\frac{x+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

解 依(1.2.1)式有

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

A,B,C,D 由 $x+1=A(x^2+1)+Bx(x^2+1)+x^2(Cx+D)$

确定：比较两边同次项系数得 $B+C=0, A+D=0, B=1, A=1$，于是 $C=D=-1$，

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$=-\frac{1}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+\text{const}$$

11 求 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解 注意 $[n(n+1)]^{-1}=n^{-1}-(n+1)^{-1}$ 并用对数展开式：

$$S(x)=\sum\nolimits_1^{\infty}x^n/n-\sum\nolimits_2^{\infty}x^{n-1}/n$$
$$=x^{-1}(1-x)\ln(1-x)+1.$$

12 求 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

解 $S=\sum\nolimits_1^{\infty}[n^{-2}-(n+1)^{-2}]=1.$

另一重要分解是"三角多项式"分解

$$\sin^{2m}x\cos^n x=A_0\cos(2m+n)x+A_1\cos(2m+n-2)x+\cdots;\quad(1.2.2)$$

$$\sin^{2m+1}x\cos^n x=A_0\sin(2m+n+1)x+A_1\sin(2m+n-1)x+\cdots,\quad(1.2.3)$$

系数 $A_0, A_1, \cdots$ 由"赋值法"(见例13)确定. 注意(1.2.2)两端是偶函数，(1.2.3)两端是奇函数，这有助于记住这些分解式. 当 m, n 较小时分解式可直接从"积化和差"与"倍角公式"得出.

13 设 $f(x)=\sin^3x\cos^2x$，求 $f^{(n)}(x)$ 与 $\int f(x)dx$.

解 由(1.2.3)有 $f(x)=A\sin5x+B\sin3x+C\sin x$. 在此等式中"赋值" $x=\pi/6, \pi/4, \pi/2$ 得出 $A+2B+C=3/16$, $-A+B+C=1/4$, $A-B+C=0$，由此解出 $-A=B=1/16$、$C=1/8$，于是

$$f(x)=\frac{1}{16}(-\sin 5x+\sin 3x+2\sin x);$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{16}\Big[-5^n\sin\Big(5x+\frac{n\pi}{2}\Big)$$
$$+3^n\sin\Big(3x+\frac{n\pi}{2}\Big)+2\sin\Big(x+\frac{n\pi}{2}\Big)\Big];$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\Big(\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{3}\cos 3x-2\cos x\Big)$$
$$+\text{const}.$$

14　展开 $f(x)=\sin x\cos^2 x$ 为 x 的幂级数.

解　$f(x)=\sin x(1+\cos 2x)/2$

$$=(\sin x+\sin x\cos 2x)/2$$
$$=(2\sin x+\sin 3x-\sin x)/4$$
$$=(\sin x+\sin 3x)/4;$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3^{2n+1})}{4(2n+1)!}x^{2n+1}(|x|<\infty).$$

此外还有一些用得较少的分解.

15　设 $f(x)=x(x+1)^{-1/3}$,求 $f^{(n)}(x)$ 与 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　此题关键在于看出 $f(x)=(x+1)^{2/3}-(x+1)^{-1/3}$:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}3^{-n}\cdot 1\cdot 4$$
$$\cdots(3n-5)(2x+3n)(x+1)^{-n-1/3};$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=(3/5)(x+1)^{5/3}-(3/2)(x+1)^{2/3}+C.$$

16　求 $S=\sum_0^\infty (n+1)^2/n!$ (参照 1.4.2).

解　利用 $(n+1)^2=n(n-1)+3n+1$,有

$$S=\sum_2^\infty 1/(n-2)!+3\sum_1^\infty 1/(n-1)!$$
$$+\sum_0^\infty 1/n!=5e.$$

你不难悟出,上面所用分解可推广为:

$$P(n) = A_0 n(n-1)\cdots(n-m+1) + A_1 n(n-1)\cdots(n-m+2) + \cdots + A_m,$$

其中 $P(x)$ 为 m 次多项式.于是你能计算：

17 求 $S = \sum_0^\infty (n^3+1)/n!\ (=6e)$.

18 设 $u = \operatorname{arctg}(x+y)/(1-xy)$，求 u_x, u_y.

解 由正切的和角公式推出

$$u = \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y,$$

于是 $u_x = 1/(1+x^2)$，$u_y = 1/(1+y^2)$.

19 设 $u = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$，求 u_x, u_y（参照题 915）.

解 类似于上题：

$$u_x = 1/\sqrt{1-x^2},\ u_y = 1/\sqrt{1-y^2}.$$

你当注意到，直接计算题 19 中的 u_x 可能不易.

1.2.2 和式合并

这是一个与"和式分解"相反的过程，其重要性固然不及和式分解，但在某些特殊问题中不乏其用.最重要的公式来自三角公式：

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2};\qquad (1.2.4)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\qquad (1.2.5)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.\qquad (1.2.6)$$

另一来源是对数公式：

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)\quad (x, y > 0).\qquad (1.2.7)$$

20 求 $l = \lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$.

解 $l = \lim\limits_{x\to\infty} 2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$= 0.$$

21 求 $I = \int x^2[\ln(1-x)+\ln(1+x+x^2)]dx$.

解 $I = \int x^2\ln(1-x^3)dx = -\frac{1}{3}\int\ln(1-x^3)d(1-x^3)$

$$= \frac{1}{3}(1-x^3)[1-\ln(1-x^3)]+C.$$

22 展开 $f(x)=\ln(1-x)+\ln(1+x+x^2)$ 为 x 的幂级数.

解 $f(x)=\ln(1-x^3)=-\sum_1^\infty x^{3n}/n$.

1.2.3 化简分母

给定分式 $A=C/B$,应如此化简 B(例如化 B 为"单项式"),使得分式易于约化或分解为和式. 以下是化简分母的几个典型例子:

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}; \tag{1.2.8}$$

$$\frac{1}{1+\sin x+\cos x}=\frac{\sin x+\cos x-1}{(\sin x+\cos x)^2-1}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x-1}{2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}; \tag{1.2.9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{2(1-x^2)}}. \tag{1.2.10}$$

如(1.2.8) ~ (1.2.10) 一类的分解在积分计算中很有用处.

23 求 $I = \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$.

解 利用(1.2.9):

$$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\cos x \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

24 求 $I = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

解 利用 $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$,

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{x}{2} + C.$$

25 求 $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$.

解 $$I = \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \int \sqrt{x+1}\, d\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}$$

$$- \frac{1}{2}\operatorname{arcsh}\sqrt{x} + C.$$

26 求 $I = \int \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} dx$.

解 化分母为 x^2:

$$I = -\frac{2}{x} - x - \frac{2\sqrt{1 - x^2}}{x} - 2\arcsin x + C.$$

1.2.4 缩短乘积与和式

利用熟知的公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ 等可作以下变形:

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = \frac{1 - x^8}{1 - x}; \qquad (1.2.11)$$

$$\cos x\cos 2x\cos 4x = \frac{\sin 8x}{8\sin x};\tag{1.2.12}$$

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.\tag{1.2.13}$$

27 展开 $f(x) = x/[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)]$ 为 x 的幂级数.

解 利用(1.2.11)：

$$f(x) = (x - x^2)/(1 - x^8) = \sum\nolimits_0^\infty x^{8n+1} - \sum\nolimits_0^\infty x^{8n+2}.$$

28 求 $l = \lim\limits_n \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解 利用(1.2.12)的一个自然推广：

$$l = \lim_n \sin x/2^n\sin(2^{-n}x) = \sin x/x.$$

1.2.5 1 与 0 的分解

1 这个简单的数可表成许多不同的形式：

$$1 = (1 + 1 + \cdots + 1)/n\tag{1.2.14}$$

$$= \sum\nolimits_0^n \binom{n}{k} x^k(1 - x)^{n-k}$$

$$= \sum\nolimits_0^n \binom{n}{k} (-x)^k(1 + x)^{n-k}\tag{1.2.15}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x\tag{1.2.16}$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x.\tag{1.2.17}$$

然而，本来很简单的 1 表成更复杂的式子意义何在呢？原来，适当选择(1.2.14)～(1.2.17)中某个公式，可能便于将 1 与演算中的其它量联系起来. 注意任何分解 $1 = \sum x_k$ 立即得出任一量 q 的分解：$q = q \cdot 1 = \sum q x_k$. 例如 $f(x) = f(x)\cos^2 x + f(x)\sin^2 x$.

29 设 $\sum\nolimits_1^n a_k = 1$，求 $l = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x} - \sum\nolimits_1^n a_k\sqrt{x+k})$.

解 $l = \lim\limits_{x\to\infty}\sum_1^n a_k(\sqrt{x} - \sqrt{x+k})$

$= \lim\limits_{x\to\infty} - \sum_1^n a_k k/(\sqrt{x} + \sqrt{x+k}) = 0.$

30 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x\cos x}$.

解 利用(1.2.17)：

$$I = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

类似地可应用"0 的分解"：

$$0 = \sum_0^n \binom{n}{k}(-1)^k = \int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x. \qquad (1.2.18)$$

注意，若 $0 = \sum a_k$，则任何量 $b = \sum b_k$ 可表为 $b = b - 0 = \sum(b_k - a_k)$. 下题正好与题 29 对应.

31 设 $\sum_1^n a_k = 0$，求 $l = \lim\limits_{x\to\infty}\sum_1^n a_k \sqrt{x^2+k}(= 0)$.

32 求 $l = \lim\limits_{x\to\infty}\sum_0^n(-1)^k\binom{n}{k}\sqrt[3]{x+k}(= 0)$.

1.2.6 Euler 公式

令 $i = \sqrt{-1}$，著名的 Euler 公式如下：

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x(x \text{ 是实数}); \\ \cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2, \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{cases} \qquad (1.2.19)$$

利用 Euler 公式可将三角函数化为指数函数，而在许多演算中处理指数函数更为方便.

33 分解 $\cos^{2n}x$ 为三角多项式(参照 1.2.1).

解 利用(1.2.19)与二项展开式：

$$\cos^{2n}x = 2^{-2n}(e^{ix} + e^{-ix})^{2n} = 4^{-n}\sum_k^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)x}$$

$$= 4^{-n}\sum_0^{2n}\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)x.$$

$$= 4^{-n}\left[2\sum_0^{n-1}\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n}\right].$$

34 分解 $\sin^{2n}x$ 为三角多项式.

解 $$\sin^{2n}x = 4^{-n}\left[2\sum_0^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n}\right].$$

35 求 $(e^x\cos x)^{(n)}$.

解 令 $u = e^x\cos x, v = e^x\sin x$,则

$$u^{(n)} + iv^{(n)} = (u + iv)^{(n)} = (e^{(1+i)x})^{(n)}$$
$$= (1+i)^n e^{(1+i)x} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n e^x e^{ix}$$
$$= 2^{n/2}e^x e^{i(x+n\pi/4)},$$

由此得

$$u^{(n)} = 2^{n/2}e^x\cos(x + n\pi/4), v^{(n)} = 2^{n/2}e^x\sin(x + n\pi/4).$$

一般地,若要对 $u = f(x)\cos bx$ 作某种演算,则令 $v = f(x)\sin bx$,于是 $w = u + iv = f(x)e^{ibx}$,将要进行的演算施于 w 可能更简便些.

36 求 $I = \int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x(a^2 + b^2 \neq 0)$.

解 令 $J = \int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$,则

$$I + iJ = \int e^{(a+ib)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} + C$$
$$= (a^2 + b^2)^{-1}(a - ib)e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + C,$$

由此得

$$I = (a^2 + b^2)^{-1}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C.$$

37 展开 $f(x) = e^x\cos x$ 为 x 的幂级数.

解 由 $e^{(1+i)x} = \sum_0^\infty (1+i)^n x^n/n!$（参照题 35）得

$$f(x) = \sum_0^\infty 2^{n/2}\cos(4^{-1}n\pi)x^n/n!.$$

38 展开 $f(x) = e^{ax}\cos bx$ 为 x 的幂级数（参照题 36）

解 $f(x) = \sum_0^\infty (a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\operatorname{arctg}(b/a))x^n/n!.$

39 求 $S(x) = \sum_1^\infty x^n\cos n\alpha.$

解 令 $T(x) = \sum_1^\infty x^n\sin n\alpha$，则

$$S + iT = \sum_1^\infty x^n e^{in\alpha} = \frac{xe^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}} = \frac{xe^{i\alpha}-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

由此得 $S(x) = (x\cos\alpha - x^2)/(1-2x\cos\alpha+x^2)(|x|<1).$

40 求 $S(x) = \sum_1^\infty n^{-1}\cos nx(0<x<\pi).$

解 利用 $\sum_1^\infty n^{-1}e^{inx} = -\ln(1-e^{ix})$，

$$S(x) = -\ln(2\sin(x/2)).$$

1.3 演算程序设计

面对一个算题，你如果完全不加思索便演算起来，或许也能得出正确结果，但其解法则未必是最佳的. 最佳解法的选择依赖于多方面的考虑，这些考虑正是本书以下各章的内容. 现在仅考虑如下问题：应如何设计合理的演算程序？如果你想获得一种通用的标准程序，那未免期望过高. 本节仅提出几条建议，倘你能依具体情况灵活运用，必能收到效果.

1.3.1 预定答案的形式

在很多情况下，计算结果的表达式的形状可预先确定，待定的仅是表达式中若干参数而已. 则计算的对象具体明确，任何多余的演算皆可免去，而且因为答案已有确定形式，演算中出现大的差错也较易发现.

对于几何问题可利用标准的曲线曲面方程.

41　求过点(1,2,5)且切于三坐标面的球面.

解　此球面必在第一卦限内,且中心为$(a,a,a)(a>0)$,半径为a,于是方程为

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2.$$

以$(x,y,z)=(1,2,5)$代入,解出$a=3$或5.

42　求过直线$\begin{cases}x+2y+z=1\\x-y-2z=-3\end{cases}$的平面,使之平行于曲线$\begin{cases}x^2+y^2=z^2/2\\x+y+2z=4\end{cases}$在点$(1,-1,2)$的切线.

解　解此题的关键在于利用"平面束方程":

$$x+2y+z-1+\lambda(x-y-2z+3)=0,$$

λ待定.平面法矢$\boldsymbol{n}=\{1+\lambda,2-\lambda,1-2\lambda\}$,曲面$x^2+y^2=z^2/2$在$(1,-1,2)$的法矢$\boldsymbol{n}_1=\{1,-1,-1\}$、平面$x+y+2z=4$的法矢$\boldsymbol{n}_2=\{1,1,2\}$.由$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)=[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2]=0$解出$\lambda=-5/2$,于是所求平面为$3x-9y-12z+17=0$.

43　求曲面$x=ue^v,y=ve^u,z=u+v$在原点的切平面.

解　由微分学知所求切平面为$z=z_x(0,0)x+z_y(0,0)y$.注意$u=v=0$对应$x=y=z=0$.在等式

$$dx=e^v(du+udv),dy=e^u(vdu+dv),dz=du+dv$$

中置$u=v=0$,得$dz(0,0)=dx+dy$,这表明$z_x(0,0)=z_y(0,0)=1$,因此所求切平面为$z=x+y$.

以上解法的好处在于,一开始就明确了要计算的量仅$z_x(0,0)$与$z_y(0,0)$而已.

答案形式可预定的典型问题无疑是函数的Taylor级数展开:$f(x)=\sum a_nx^n$.如果能预知某些a_n,则可简化系数计算.例如,当$f(x)$是奇函数时$a_{2n}=0$;当$f(x)$为偶函数时$a_{2n-1}=0$.

44 展开 $f(x)=\int_0^x e^{x^2-t^2}\mathrm{d}t$ 为 x 的幂级数.

解 因 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)=\sum_1^\infty a_{2n-1}x^{2n-1}$. 由 $f'(x)=2xf(x)+1$ 得

$$\sum_1^\infty(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}=\sum_1^\infty 2a_{2n-1}x^{2n}+1.$$

比较上式两端同次项系数得出 $a_1=1, a_{2n+1}=2^n/(2n+1)!!$.

因许多函数的 Taylor 展开式可间接地求得而无须直接计算 Taylor 系数，上题的解法应用有限. 对于 Fourier 级数展开，能预知部分 Fourier 系数就很有意义. 设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则当 f 为奇函数时 $a_n=0$，当 f 为偶函数时 $b_n=0$. 以下四种情况更值得记住：

(i) f 是奇函数且 $f(\pi-x)=f(x)$: $a_n=b_{2n}=0$;

(ii) f 是奇函数且 $f(\pi-x)=-f(x)$: $a_n=b_{2n-1}=0$;

(iii) f 是偶函数且 $f(\pi-x)=-f(x)$: $a_{2n}=b_n=0$;

(iv) f 是偶函数且 $f(\pi-x)=f(x)$: $a_{2n-1}=b_n=0$.

分别以 $\sin x,\sin 2x,\cos x,\cos 2x$ 作为情况 (i) ~ (iv) 的代表，就容易记住了.

45 在$[-\pi,\pi]$上展开 $f(x)=\begin{cases}\alpha & (-\pi<x<0)\\ \beta & (0<x<\pi)\end{cases}$ 为 Fourier 级数.

解 令 $\varphi(x)=f(x)-2^{-1}(\alpha+\beta)$，则 φ 属情况 (i)(观察 φ 的图形即可看出)，于是 $\varphi(x)=\sum_1^\infty b_{2n-1}\sin(2n-1)x\,(0<|x|<\pi)$，

$$b_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\beta - \alpha}{2}\sin(2n-1)x\mathrm{d}x = \frac{2(\beta - \alpha)}{(2n-1)\pi}.$$

于是 $f(x) = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}(0 < |x| < \pi)$.

以上解法的关键在于将 $f(x)$ 改造成属情况(i)的 φ,改造的方法可从直观上得到启发.若你仔细揣摩了上题的解法,就容易理解以下几题.

46 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开 $f(x) = \begin{cases} 0(-\pi < x < 0) \\ \cos x(0 < x < \pi) \end{cases}$ 为 Fourier 级数.

解 $\varphi(x) = f(x) - 2^{-1}\cos x$ 属情况(ii),于是 $\varphi(x) \sim \sum_1^\infty a_{2n}\sin 2nx$,而

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\cos x\sin 2nx\mathrm{d}x = \frac{4n}{\pi(4n^2 - 1)},$$

于是 $f(x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{n\sin 2nx}{4n^2 - 1}(0 < |x| < \pi)$.

现在你可以试做一个类似的题了.

47 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开 $f(x) = \begin{cases} 0(-\pi < x < 0) \\ \sin x(0 < x < \pi) \end{cases}$ 为 Fourier 级数.

解 $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}(|x| \leqslant \pi)$.

48 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开 $f(x) = |\sin x|$ 为 Fourier 级数.

解 显然 f 属情况(iv),于是易得出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_{2n}\cos 2nx$$
$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}(|x| \leqslant \pi).$$

49 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开 $f(x) = |x|$ 为 Fourier 级数.

解 $\varphi(x) = f(x) - 2^{-1}\pi$ 属情况(iii)(试画出其图形!),于是 $\varphi(x) \sim 2^{-1}a_0 + \sum_1^\infty a_{2n-1}\cos(2n-1)x$. 算出 $a_0 = 0$,

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2},$$

故得 $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_1^\infty \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}(|x| \leqslant \pi)$.

50 在$[0,\pi]$上展开 $f(x) = x + 1$ 为余弦级数.

解 令 $\varphi(x) = f(x) - 1 - 1^{-1}\pi$ 并用情况(iii),结果是

$$f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}(0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

此外还有一些可预定答案的问题散见于各个领域,不那么具有规律性,只举两例.

51 求 $I = \int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$(参照题 36).

解 推测 $I = e^{ax}(A\sin bx + B\cos bx) + C$. 由

$$e^{ax}\sin bx = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = e^{ax}[(aA - bB)\sin bx + (bA + aB)\cos bx]$$

得 $aA - bB = 1, bA + aB = 0$. 由此解出 $A = a/(a^2 + b^2), B = -b/(a^2 + b^2)$,于是 $I = (a^2 + b^2)^{-1}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

52 设 $f(x) = 3x - \sqrt{1 - x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

解 令 $a = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x) = 3x - a\sqrt{1 - x^2}$,于是

$$a = \int_0^1 (3x - a\sqrt{1 - x^2})^2\mathrm{d}x = 3 + \frac{2}{3}a^2 - 2a.$$

解出 $a = 3$ 或 $3/2$.

1.3.2 选定计算方案

你不要指望会有一种适用于任何算题的方案,但某些原则具有一般意义. 例如,应据题意确定,是直接计算所求的量 $Q =$

$F(\dot{q}_1, q_2, \cdots)$，还是计算另一串相关的量 $q_1', q_2', \cdots$，使得可以某个表达式 $F'(q_1', q_2', \cdots)$ 间接地得出 Q. 若能从这两种方案中适当地选择其一，可使计算简化. 下面用例子说明，间接法有时非常有效，不应忽略.

53 以极坐标(r,θ)表出 $z_x^2 + z_y^2$.

解 习惯的做法是以 $z_x = z_r r_x + z_\theta \theta_x$ 代入所述表达式. 不过，若先算出 z_r, z_θ(而不是 z_x, z_y)：

$$z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta, z_\theta = - z_x r\sin\theta + z_y r\sin\theta,$$

则立得 $z_r^2 + r^{-2} z_\theta^2 = z_x^2 + z_y^2$.

以上解法启示出解下题的方案：

54 依 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ 变换方程 $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

解 $z_{uu} = x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} + x z_x + y z_y$;

$$z_{vv} = y^2 z_{xx} - 2xy z_{xy} + x^2 z_{yy} - x z_x - y z_y,$$

由此立得 $z_{uu} + z_{vv} = (x^2 + y^2)(z_{xx} + z_{yy})$，原方程化为 $z_{uu} + z_{vv} = 0$.

受以上两题的启发，你对于以下两题的求解定能选择合理的方案.

55 以极坐标(r,θ)表出 $x z_x + y z_y$.

56 依 $u = x/(x^2 + y^2), v = -y/(x^2 + y^2)$ 变换方程 $z_{xx} - z_{yy} = 0$.

1.4 几类计算问题

现在该用一些例子来阐释前几节所提供的一般原则了. 不过，系统的材料安排在后面的章节中. 本节所选的三类问题固然有其重要性，但主要起初步说明的作用.

1.4.1 积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$之计算

计算积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$原则上可用 Newton-Leibniz 公式$\int_a^b \mathrm{d}F(x) = F(x)\Big|_a^b$，但当$f(x)$没有初等原函数或不易求出原函数时，以上方法难以奏效. 现在你该回想起 1.1 节中强调的方法，考虑能否将$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$归化为某些"标准积分"的组合或变形. 应用上有价值的标准积分甚多，此处只强调 Euler 积分：

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x(\alpha > 0); \tag{1.4.1}$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x(\alpha,\beta > 0). \tag{1.4.2}$$

不难熟记以下公式：

$$B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)(\text{转换公式}); \tag{1.4.3}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\quad(\text{递推公式}); \tag{1.4.4}$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin\alpha\pi, 0 < \alpha < 1(\text{余元公式}). \tag{1.4.5}$$

由(1.4.4)(1.4.5)推出$\Gamma(n+1) = n!$，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. 适当地利用(1.4.1)～(1.4.5)及通常的积分公式(如变量代换与分部积分)，可成功地算出一系列积分，这些积分用其它方法计算往往不易. 你从以下例题将体会到运用 Euler 积分的明显优势.

57 求$I = \int_0^\infty x^{2n}\exp(-x^2)\mathrm{d}x(n \geqslant 1)$.

解 令$t = x^2$，由(1.4.1)进而用(1.4.4)得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{n-1/2}e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{-n-1}(2n-1)!!\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

即用同样的方法,就可对付更一般的问题:

58 求 $I=\int_0^\infty x^m\exp(-ax^n)\mathrm{d}x\,(a,n>0,m>-1)$.

解 $I=\frac{1}{n}a^{-(m+1)/n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

59 求 $I=\int_1^\infty x^2\exp(-x^2+2x)\mathrm{d}x$.

解 令 $t=(x-1)^2$,有

$$I=\frac{e}{2}\int_0^\infty e^{-t}(1+\sqrt{t})^2\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

$$=\frac{e}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)+2\Gamma(1)+\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{e}{4}(\sqrt[3]{\pi}-4).$$

有了上题的经验之后,你就不怕如下积分了:

$$\int_a^\infty P(x)\exp(-bx^2+2abx)\mathrm{d}x\,(b>0),$$

其中 $P(x)$ 为多项式.注意 $P(x)=\sum P^{(k)}(a)(x-a)^k/k!$

60 求 $I=\int_0^1 x^\alpha(-\ln x)^\beta\mathrm{d}x\,(\alpha,\beta>-1)$.

解 令 $t=-\ln x$,然后用题 58:

$$I=\int_0^\infty t^\beta e^{-(\alpha+1)t}\mathrm{d}t=(\alpha+1)^{-\beta-1}\Gamma(\beta+1).$$

以下两题很明显可归化为积分(1.4.2).

61 求 $I=\int_0^1[x^{2n}/\sqrt{(1+x)(1-x)}]\mathrm{d}x\,(n\geqslant 1)$.

解 令 $t=x^2$,则

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1/2}(1-t)^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

62 求 $I=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,(a<b)$.

解 令 $x=a+t(b-a)$,则 $I=B(1/2,1/2)=\pi$.

63 求 $I=\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n (x+c)^{-m-n-2}\mathrm{d}x\,(a<b,m,n>-1)$.

解 此题亦应能用(1.4.2),但所需代换颇为精巧:$t=(b+c)(b-a)^{-1}(x-a)(x+c)^{-1}$,用此得

$$I=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}B(m+1,n+1).$$

64 求 $I=\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sin^2 x$,则 $\cos x=\sqrt{1-t}$,$\mathrm{d}t=2\sqrt{t(1-t)}\mathrm{d}x$,于是

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{5/2}(1-t)^{3/2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)\\&=2^{-1}\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)/\Gamma(6)=3\pi/512.\end{aligned}$$

同样的方法可用于更一般的问题:

65 求 $I=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x\,(m,n>-1)$.

解 $I=\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{m+1}{2},\dfrac{n+1}{2}\right)$.

上题可能是说明应用Euler积分的好处的典型例子.m,n 愈大,应用 Euler 积分就愈可取.当然,若 m,n 不大,或 m,n 之一为1时,亦可直接计算题 65 中的积分.

以下三题中 Euler 积分的用法也很引人.

66 求 $I=\int_0^\infty x^2(1+x^4)^{-1}\mathrm{d}x$.

解 令 $1+x^4=t^{-1}$,则 $4x^3\mathrm{d}x=-t^{-2}\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/4}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

解上题的方法甚至可用到更一般的积分求解中:

67 求$I=\int_0^{\infty}x^{m-1}(a+bx^n)^{-p}\mathrm{d}x(m,n>0,p>m/n,ab>0)$.

解 令$a+bx^n=a/t$, $I=n^{-1}a^{-p}(a/b)^{m/n}B(p-m/n,m/n)$.

试将上题用于以下具体例子：

68 求$\int_0^{\infty}x^{m-1}(1+x^n)^{-1}\mathrm{d}x(=\pi/n\sin(m\pi/n))$.

除 Euler 积分之外，还有其它一些标准积分可用．例如，Dirichlet 积分是较重要的一个：

$$\int_0^{\infty}x^{-1}\sin ax\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a. \tag{1.4.6}$$

69 求$I=\int_0^{\infty}x^{-2}\sin^2\mathrm{d}x$.

解 一次分部积分之后可用(1.4.6)：

$$I=\frac{\sin^2x}{x}\bigg|_{\infty}^{0}+\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

70 求$I=\int_0^{\infty}x^{-1}\sin^3x\mathrm{d}x$

提示：利用$4\sin^3x=3\sin x-\sin 3x$. $I=\pi/4$.

1.4.2 积分$\int_L\mathrm{d}u$之计算

如果你同意说"定积分是直线段上的积分"，那么就容易理解曲线积分是定积分的直接推广．然而，曲线积分也如定积分一样有一个"Newton-Leibniz 公式"吗？真是幸运，确有如下公式可用：

$$\int_L\mathrm{d}u=u\Big|_A^B, \tag{1.4.7}$$

其中u是连续可微函数，A,B分别为曲线L的起点与终点．因此，倘能指明$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$(可惜这样的情况并不够多)，积

分$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的计算就易如反掌了，且看一些例子.

71 求 $I = \int_L (2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y$，$L$是从点$(0,0)$到点$(\pi/2,1)$的光滑曲线.

解 首先试着将被积表达式表成全微分：

$$\begin{aligned}&(2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y\\&= (2xy^3\mathrm{d}x + 3x^2y^2\mathrm{d}y) - (y^2\cos x\mathrm{d}x + 2y\sin x\mathrm{d}y) + \mathrm{d}y\\&= \mathrm{d}(x^2y^3) - \mathrm{d}(y^2\sin x) + \mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2y^3 - y^2\sin x + y),\end{aligned}$$

于是 $I = (x^2y^3 - y^2\sin x + y)\Big|_{(0,0)}^{(\pi/2,1)} = \pi^2/4.$

初步总结一下. 为应用公式

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u\Big|_A^B,$$

关键在于求得$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的"原函数"$u$，使$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$（这样的$u$未必存在）. 如同求一元函数的原函数一样，求$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$之原函数亦是微分运算的逆运算，因而演算过程无非是反用微分规则与全微分公式. 例如，若$F'(x) = f(x)$，$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，则反用复合函数微分规则得出：$f(u)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$之"原函数"是$F(u)$. 你应能熟记如下基本微分式：

$$\mathrm{d}(xy) = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(y/x) = x^{-2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x);$$

$$\mathrm{darctg}(y/x) = (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)/(x^2 + y^2).$$

对一个较复杂的微分式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，应如解题 71 一样，将其适当分组，使得便于求得每组的"原函数"，然后合并为所需之u.

现在你可以自己来试试了.

72 求 $I = \int_L (1 + xe^{2y})\mathrm{d}x + (x^2e^{2y} - y)\mathrm{d}y$，$L$：$y = 2\sin(\pi x/4)(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

解 $I=\left(x+\frac{1}{2}x^2e^{2y}-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{(0,0)}^{(2,2)}=2e^4.$

73 求 $I=\int_L\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x$

$+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y,L:$

$y=x^2(0\leqslant x\leqslant\pi).$

解 $I=\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\Big|_{(0,0)}^{(\pi,\pi^2)}=\pi.$

74 求 $I=\int_L\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,$L$ 是半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)$ 上从$(-a,0)$ 到$(a,0)$ 的一段.

解 $I=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right]\Big|_{(-a,0)}^{(a,0)}$

$=\lim\limits_{y\downarrow 0}\left[-\operatorname{arctg}\frac{a}{y}+\operatorname{arctg}\left(\frac{-a}{y}\right)\right]=-\pi.$

75 求 $I=\int_L\left[\frac{1}{y}+yf(xy)\right]\mathrm{d}x+x\left[f(xy)-\frac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y$,$L$ 是第一象限内从点$(3,2/3)$ 到$(1,2)$ 的光滑曲线,$f\in C[0,\infty)$.

解 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$I=\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$

$$=\int_L\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}+F(xy)\right)$$

$$=\left[\frac{x}{y}+F(xy)\right]\Big|_{(3,2/3)}^{(1,2)}=-4.$$

上题的特点是 f 并非已知,但你在着手计算时不应因此而踌躇:f 最终会被消去.

即使 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 不是全微分,亦可考虑部分地应用公式

(1.4.7)：若 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u+P_1\mathrm{d}x-Q_1\mathrm{d}y$，而 $\int_L P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y$ 较易计算，则积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 可化简.

76 求 $I=\int_L(3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y, L: y=x^2-2x(0\leqslant x\leqslant 4)$.

解 $I=\int_L(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)+\sin x\mathrm{d}x-ye^y\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x$

$$=(x^2y-\cos x+e^y-ye^y)\Big|_{(0,0)}^{(4,8)}+\int_L xy\mathrm{d}x$$

$$=128-\cos 4-7e^8+\int_0^4 x(x^2-2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{448}{3}-\cos 4-7e^8.$$

77 求 $I=\int_L(5xy-e^x\sin y)\mathrm{d}y+e^x\cos y\mathrm{d}x, L: x=\sqrt{2y-y^2}(0\leqslant y\leqslant 2)$.

解 $I=\int_L e^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)+5xy\mathrm{d}y$

$$=e^x\cos y\Big|_{(0,0)}^{(0,2)}+5\int_L xy\mathrm{d}y$$

$$=\cos 2-1+5\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\cos 2-1+40\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\cos 2-1+40B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\cos 2-1+\frac{5\pi}{2}.$$

你可以依据上面的方法解以下两题.

78 求 $I=\int_L(12xy+e^y)\mathrm{d}x+(xe^y-\cos y)\mathrm{d}y$，$L$：沿 $y=x^2$ 从 $(-1,1)$ 到 $(0,0)$，再沿 x 轴到 $(2,0)$.

解 $I=(xe^y-\sin y)\Big|_{(-1,1)}^{(2,0)}+12\int_{-1}^0 x^3\mathrm{d}x$

$= e - 1 + \sin 1.$

79 求 $I = \int_L (e^x \sin 2y - y)\mathrm{d}x + (2e^x \cos 2y - 100)\mathrm{d}y, L$: $y = \sqrt{1 - x^2}(-1 \leqslant x \leqslant 1)(I = -\pi/2).$

对于沿空间曲线的积分，完全可作类似的考虑.

80 求 $I = \int_L (x^2 - yz)\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\mathrm{d}z$, $L: x = \cos t, y = \sin t, z = t(0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$

解
$$I = \int_L d\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz\right)$$
$$= \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz\right)\Bigg|_{(1,0,0)}^{(1,0,2\pi)} = \frac{8\pi^3}{3}.$$

81 求 $I = \oint_L (y + z)\mathrm{d}x + (z + x)\mathrm{d}y + (x + y)\mathrm{d}z, L$: $\begin{cases} y^2 = 4xz \\ x + z = a \end{cases} (a > 0).$

解
$$I = I + \int_L (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)$$
$$= \int_L (x + y + z)\mathrm{d}(x + y + z) = 0.$$

1.4.3 级数求和

你大概对级数求和问题很感兴趣，能完成无穷多项相加，多么引人！本书至少有两处——本段及 6.3 节——论及级数求和.求和法可能是微积分学中最精巧的方法之一，但其要领其实很简单：要求出 $S = \sum u_n$，首先要将级数适当“变形”，使之转化为已知其和的标准级数.“变形”的主要方法是：分解、逐项微分或积分，后者在 6.3 节中考虑，前者则是本段的课题.

“分解法”求和实际上已由题 6 提示：若 $\sum v_n$ 与 $\sum w_n$ 皆可求和，则可用 $\sum(v_n + w_n) = \sum v_n + \sum w_n$. 自然，你必须牢记一定数量的基本求和公式，如

$$\sum_0^\infty x^n = (1-x)^{-1}(|x|<1); \tag{1.4.8}$$

$$\sum_0^\infty x^n/n! = e^x(|x|<\infty); \tag{1.4.9}$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! = \sin x(|x|<\infty); \tag{1.4.10}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} x^n/n = \ln(1+x)(-1<x\leqslant 1); \tag{1.4.11}$$

$$\sum_1^\infty n^{-2} = \pi^2/6, \sum_1^\infty (-1)^{n-1}/n^2 = \pi^2/12. \tag{1.4.12}$$

此外，你所要作的就是将要求和的级数分解为上述级数的某种组合. 当然，成功的分解需要一点技巧；而求和的艺术在很大程度上就是这种分解的艺术.

82 求 $S(x) = \sum_0^\infty (n^2+n+1)2^{-n}x^n/n!$（参照题 6,16,17）.

解 首先由观察判定：应以转化成级数(1.4.9)为目标进行分解. 令 $n^2+n+1 = n(n-1)+2n+1$，有

$$S(x) = \sum_2^\infty \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + 2\sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n = (4^{-1}x^2+x+1)e^{x/2}.$$

你大概已悟出规律：若 $P(n)$ 是 n 的多项式，则应如此分解 $P(n)$，使得 $P(n)/n! = (A/n!) + [B/(n-1)!] + \cdots$. 于是，利用 $n^3 = (n+1)n(n-1) + (n+1) - 1$，就能解：

83 求 $S(x) = \sum_1^\infty (-1)^n n^3 x^n/(n+1)!$ $(= (x^2+1+x^{-1})e^{-x} - x^{-1})$.

若级数通项含因子 $1/(2n+1)!$ 或 $1/(2n)!$，则多半要用到 $\sin x$（或 $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$）的展开式，分解级数应以此为目标.

84 求 $S(x) = \sum_0^\infty (-1)^n (2n^2+1)x^{2n}/(2n)!$.

解 作分解 $2n^2+1=2^{-1}[2n(2n-1)+2n+2]$，于是

$$S(x)=\frac{x^2}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x}{2}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$=(1-2^{-1}x^2)\cos x-2^{-1}x\sin x.$$

用类似的方法你能解下题：

85 求 $\sum_1^{\infty}(-1)^n n x^{2n}/(2n+1)!$ $(=2^{-1}(\cos x-x^{-1}\sin x))$.

求形如$\sum a_n x^n/(an^2+bn+c)$的级数之和可考虑分解$(an^2+bn+c)^{-1}=A(n-\alpha)^{-1}+B(n-\beta)^{-1}$，然后用(1.4.11)式.

86 求 $S(x)=\sum_2^{\infty}(-1)^n n x^n/(n^2+n-2)$.

解 作分解：$n/(n^2+n-2)=3^{-1}[(n-1)^{-1}+2(n+2)^{-1}]$，然后有

$$S(x)=\frac{x}{3}\sum_2^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1}-\frac{2}{3x^2}\sum_2^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n+2}$$

$$=\frac{x}{3}\ln(1+x)-\frac{2}{3x^2}\left[\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]$$

$$=\frac{x^3-2}{3x^2}\ln(1+x)+\frac{2x^2-3x+6}{9x}(-1<x\leqslant 1).$$

87 求 $S(x)=\sum_2^{\infty}(-1)^n x^n/(n^2+n-2)$.

解 类似于上题：$S(x)=\dfrac{x^3+1}{3x^2}\ln(1+x)-\dfrac{2x^2-3x+6}{18x}(-1<x\leqslant 1)$.

88 求 $S(x)=\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}(2+x)^n(2-x)^{-n}/n(n+1)$.

解 令 $y=(2+x)/(2-x)$，仍用上面的方法：

$$S(x)=(1+y^{-1})\ln(1+y)-1$$

$$=\frac{8+2x^2}{(x+2)^2}\ln\frac{8+2x^2}{(2-x)^2}-1(x\leqslant 0).$$

89 求 $S=\sum_1^{\infty}n^{-2}(n+1)^{-2}(n+2)^{-2}$.

解 用待定系数法得出分解(参考 1.2.1):

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4n^2}+\frac{21}{4n(n+1)}-\frac{51}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{4(n+2)^2},$$

然后利用(1.4.12)及 $\sum_1^{\infty}n^{-1}(n+1)^{-1}=-1$:

$$S=\frac{1}{4}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{21}{4}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{51}{4}\sum_2^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_2^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\sum_3^{\infty}\frac{1}{n^2}=(\pi^2/4)-(39/16).$$

你能类似地解出:

90 求 $\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-2}(n+2)^{-2}(=(\pi^2/24)-(5/16))$.

1.5 计算结果之检验

你用了铺满一大张纸的算式之后终于有了结果,你能自信所得答案正确无误吗?如果无从判断,望着可疑的答案不安地啃着笔杆,你必定心急如焚.本节将告诉你,有许多简单办法可用来或粗或细地检验结果,或者消除你的疑虑,或者促使你尽快改弦更张.

1.5.1 粗的检验

你多半宁愿用简捷但可能不十分可靠的检验法,因你珍惜时间;在时间被严格限制的场合尤其如此.下面提出十条简便检验法,你可依据算题特点选用.

(i) 检验符号. 以下这些量皆非负:非负函数的定积分、重积分及第一类曲线或曲面积分;正项级数之和;弧长、面积、体积、质量与转动惯量;首项为正的 Leibniz 型级数之和,等等. 若计算如上的量得出负数,则必错无疑.

91 求 $S=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}/n^2(n+1)$.

解 $S=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}(n^{-2}-n^{-1}+(n+1)^{-1})=(\pi^2/12)-1-2\ln 2$.

检验 因 $S<0$,结果有误. 实际上 $S=(\pi^2/12)+1-2\ln 2$. 本题算法可行,错误源于疏忽.

(ii) 检验量的界限. 对某些量不经计算即可预知其所在范围,若答案不在预定范围内,则必定计算有误.

92 求 $I=\int_1^\infty x^{-1}(x^{10}+x^5+1)^{-1/2}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{x^{10}+x^5+1}=x^5+2^{-1}+t$,则

$$I=\frac{8}{5}\int_{-\infty}^{\sqrt{3}-3/2}\frac{\mathrm{d}t}{3-4t-4t^2}=\frac{1}{10}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

检验 由 $x^5\leqslant\sqrt{x^{10}+x^5+1}\leqslant x^5+1(x\geqslant 1)$ 推出

$$\frac{1}{5}\ln 2=\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x(x^5+1)}\leqslant I\leqslant\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^6}=\frac{1}{5}.$$

而 $\frac{1}{10}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)<\frac{1}{5}\ln 2$,结果有误. 实际上 $I=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

93 求均质曲面 $z=\frac{3}{4}-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 之重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

解 显然 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 其次,$\iint\mathrm{d}S=7\pi/6$,

$$\bar{z}=\frac{6}{7\pi}\iint z\mathrm{d}S=\frac{6}{7\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(\frac{3}{4}-r^2\right)\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r=$$

$\frac{93}{140}$.

检验 曲面顶点是(0,0,3/4),可断定$0<\bar{z}<3/8$,因此答案不正确.实际上$\bar{z}=47/140$.

(iii) 检验奇偶性.应理解并记住以下结论:奇函数的导数与原函数皆为偶函数,而其幂级数展开式仅含奇次项,Fourier展开式是正弦级数;偶函数的导数与一个原函数是奇函数,其幂级数展开式仅含偶次项,Fourier展开式是余弦级数;若$f(x,y)$是y的奇[偶]函数,则$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$是奇[偶]函数,等等.

94 求$I=\int \ln^2(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

解 令$u=x+\sqrt{x^2+1}$,用两次分部积分得出$I=x\ln^2 u-2\sqrt{1+x^2}\ln u+2x^2+C$.

检验 $\ln u$是奇函数,$\ln^2 u$是偶函数,因此$I=$奇函数$+C$,与结果不合.正确答案:$I=x\ln^2 u-2\sqrt{1+x^2}\ln u+2x+C$.

95 展开$f(x)=(\mathrm{arctg}x)^2$为x的幂级数.

解 利用$\mathrm{arctg}x=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}x^{2n-1}/(2n-1)$,用级数乘法得:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}(|x|\leqslant 1).$$

检验 $f(x)$是偶函数,其展开式确只含偶次项,因而可初步肯定其正确性.

96 在$[-\pi,\pi]$上展开$f(x)=\arcsin(\sin x)$为Fourier级数.

解 直接算出Fourier系数a_n,b_n,得

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)^2}\sin(2n-1)x(|x|\leqslant\pi).$$

检验 因 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(\pi-x)=f(x)$，必定 $f(x)=\sum_1^\infty b_{2n-1}\sin(2n-1)x$（见 1.3.1）。答案合于此形式.

97 求 $S(x)=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}x^{2n}/n(2n-1)$.

解 用题 86 的解法，不难得出：

$S(x)=2x\mathrm{arctg}x-\ln(1-x^2)(|x|\leqslant 1)$.

检验 $S(x)$ 是偶函数，答案确如此.

98 求 $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\mathrm{ch}bx\mathrm{d}x(a>0)$.

解 利用标准的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$（参考 1.4.1）：

$$I=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+bx}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-bx}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{b^2/4a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{b^2/4a}.$$

检验 I 应是 b 的偶函数，答案确如此.

99 求 $I=\int_L z\mathrm{d}x$，L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ y^2=ax\end{cases}$ 上从点 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,\sqrt{2}a)$ 的一段.

解 引入曲线的参数表示：$x=a\mathrm{ctg}^2t$，$y=a\mathrm{ctg}t$，$z=a\cos t(1+\mathrm{ctg}^2t)\left(\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\pi/2\right)$，

$$I=a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sin^5t}\sqrt{\sin^4t-7\sin^2t+8}\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_{\sqrt{2}/2}^{1}u^{-5}\sqrt{u^4-7u^2+8}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+\sqrt{38}}{17}\right).$$

检验　若以 $-a$ 换 a，则 L 换为关于 yz 平面的镜象，I 不变，因此 I 为 a 的偶函数. 答案确如此.

(iv)　检验周期性. 周期函数的导数为周期函数，而其原函数是周期函数与线性函数之和.

100　求 $I=\int\sin^2x(1+\sin^2x)^{-1}\mathrm{d}x$.

解　令 $t=\mathrm{ctg}x,\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x/\sin^2x$，得

$$I=-\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+2)}$$
$$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}x/\sqrt{2})+C.$$

检验　答案是周期函数与线性函数之和.

(v)　检验对称性　若 $f(x,\alpha,\beta)$ 是 α,β 的对称函数，则 $\varphi(\alpha,\beta)=\int_a^b f(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x$ 为对称函数. 一般地，若已知条件关于参数 $\alpha,\beta,\cdots$ 对称，则计算结果亦必关于 $\alpha,\beta,\cdots$ 对称.

101　求 $I=\int_0^{\pi/2}(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)^{-1}\mathrm{d}x(ab\neq0)$.

解　令 $t=\mathrm{tg}x,I=\int_0^{\infty}(a^2t^2+b^2)^{-1}\mathrm{d}t=\pi/2|ab|$.

检验　因 $\int_0^{\pi/2}(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)^{-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^{-1}\mathrm{d}x$（参考 4.2），故 I 关于 a,b 对称. 答案合于此.

102　设 $n>0$，求区域 $a^{-n}x^n+b^{-n}y^n+c^{-n}z^n\leqslant1,x,y,z\geqslant0$ 之体积 V.

解　令 $x=ar\cos\theta\sin\varphi,y=br\sin\theta\sin\varphi,z=cr\cos\varphi$，则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,0\leqslant r^n(\cos^n\theta\sin^n\varphi+\sin^n\theta\sin^n\varphi+\cos^n\varphi)\leqslant1$，

$$V=\frac{abc}{3}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}[\sin^n\varphi(\cos^n\theta+\sin^n\theta)+\cos^n\varphi]^{-3/n}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

令 $t=\mathrm{tg}\varphi,S=\mathrm{tg}\theta$，易得 $V=\frac{abc}{3n^2}\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)$.

检验　V 显然关于 a,b,c 对称，答案确如此.

(vi)　检验齐次性　若 $f(x,\alpha,\beta)$ 关于 (α,β) 是 m 次齐次函数，则 $\varphi(\alpha,\beta)=\int_a^b f(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x$ 是 m 次齐次函数. 一般地，若已知条件关于参数 $\alpha,\beta,\cdots$ 是齐次的，则计算结果是 $\alpha,\beta,\cdots$ 的齐次函数.

103　求曲线 $a^{-2}x^2+b^{-2}y^2=m^{-1}x+n^{-1}y$ 所围面积 S.

解　令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, 0\leqslant r\leqslant am^{-1}\cos\theta+bn^{-1}\sin\theta$,

$$S=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{m}\cos\theta+\frac{b}{n}\sin\theta\right)^2\mathrm{d}\theta=\frac{\pi ab}{2}\left(\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}\right).$$

检验　已知条件关于 a,b 与 m,n 是齐次的，因此 S 亦应如此.

104　求密度为 1 的锥面 $z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant b)$ 关于直线 $y=0,z=b$ 的转动惯量 I.

解　令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^{-1}\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned}I&=\iint_S[y^2+(z-b)^2]\mathrm{d}S\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left[r^2\sin^2\theta+\left(\frac{br}{a}-b\right)^2\right]r\mathrm{d}r\\&=a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1[a^2t^2\sin^2\theta+b^2(t-1)^2]t\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi a}{12}(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

检验　上面演算中最后一个积分之被积函数关于 a,b 是 2 次齐次的，因此 I 关于 a,b 应是 4 次齐次的，答案正是这样.

(vii)　检验方次　设 D 是某个依赖于参数 $a,b,\cdots$ 的图形，D 的方程对 $x,y,z,a,b,\cdots$ 是齐次的（不论次数），则 D 的体

积是 $a,b,\cdots$ 的 3 次齐次函数(长度、面积、转动惯量等类推),k 次齐次函数 $f(x,y,z)$ 在 D 上的体积分是 $a,b,\cdots$ 的 $k+3$ 次齐次函数(线积分与面积分类推).

105 求曲线 $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$ 所围面积 S.

解 用极坐标易算得 $S=3\pi a^2/4$.

检验 曲线方程关于 x,y,a 是齐次的,因此 S 关于 a 应是 2 次的,确如答案所示.

106 求密度为 1 的球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 关于 z 轴的转动惯量 I.

解 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}x\mathrm{d}y/\sqrt{a^2-r^2}$,

$$I=\iint(x^2+y^2)\mathrm{d}S=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{ar^2}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r=\frac{8\pi a^4}{3}.$$

检验 球面方程关于 x,y,z,a 是齐次的,因此 I 应为 a 的 4 次函数,确如答案所示.

107 求圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+(y-a)^2=b^2(b<a)$ 所围之面积 S.

解 两圆交点为 $(\pm c,d)$,$c=\dfrac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}$,于是

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^c(\sqrt{a^2-x^2}-a+\sqrt{b^2-x^2})\mathrm{d}x\\&=c(\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}-2a)\\&\quad+a^2\arcsin\frac{c}{a}+b^2\arcsin\frac{c}{b}\\&=-\frac{b}{2}\sqrt{4a^2-b^2}+a^2\arcsin\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2a^2}\\&\quad+b^2\arcsin\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2a^2}.\end{aligned}$$

检验 圆方程对 x,y,a,b 是齐次的,因此 S 应是 a,b 的 2 次齐次函数,确如答案所示.

108 求 $I = \iiint\limits_V y^2 \mathrm{d}v, V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, z \geqslant 0$.

解 $I = \frac{2\pi}{15} ab^2 c$.

检验 V 之边界面方程关于 x, y, z, a, b, c 是齐次的，因此 I 关于 a, b, c 是 $2 + 3 = 5$ 次齐次函数，答案有误，应为 $I = \frac{2\pi}{15} ab^3 c$（参照题 497）.

(viii) 检验特殊值．以参数的某些特殊值代入答案，看是否得出正确结果．例如题 101 当 $a = b = 1$ 时直接看出 $I = \pi/2$，这就在对称性检验的基础上增强答案 $I = \pi/2|ab|$ 的可信度．再看两例．

109 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 = 1 (b \leqslant a)$ 内那部分的面积 S.

解 注意 $\mathrm{d}S = az^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$S = 8a\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}.$$

检验 当 $a = b$ 时球面全部进入柱面之内，此时 $S = 4\pi a^2$，这正好是 $8a^2 \arcsin(b/a)|_{a=b}$.

110 求 $I = \int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2} \mathrm{d}x (a, b > 0)$.

解 用 6.4 中的方法：

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{2a\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{b(a + b)};$$

$$I|_{a=0} = 2\int_0^\infty \frac{\ln x}{b^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{2\ln b}{b} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{\pi \ln b}{b};$$

$$I = \frac{\pi \ln b}{b} + \int_0^a \frac{\pi}{b(t + b)} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{b} \ln(a + b).$$

检验 取 $a = b = 1$，则

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x=-2\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\mathrm{d}t=\pi\ln 2$$

（参考题 478），这正好是$\frac{\pi}{b}\ln(a+b)|_{a=b=1}$.

(ix) 检验极限值 这可看作特殊值检验法的一种推广.

111 求$a^{-2}(x-m)^2+b^{-2}(y-n)^2\leqslant 1$内的点到原点的平均距离平方$d^2$.

解 $$d^2=\frac{1}{\pi ab}\iint(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=m^2+n^2+4^{-1}(a^2+b^2).$$

检验 直观上很明显，当$a,b\to 0$时$d^2\to m^2+n^2$，这正好可从答案得出.

112 在半径为a的球面上用平面截下一块，其中的点到平面最大距离为h，求其面积S.

解 用类似于题 109 的方法易算出$S=2\pi ah$.

检验 直观上显然当$h\to 0$时$S\to 0$；当$h=a$时$S=2\pi a^2$，此两点皆为答案所满足.

(x) 检验组合值 设已分别求得I,J，而$I+J$（或某个组合$aI+bJ$）容易直接求得，则两种结果的对比给出I,J的初步检验.

113 求$I=\int_0^{\pi}e^x\cos^2x\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\pi}e^x\sin^2x\mathrm{d}x$.

解 用两次分部积分可求得$I=3(e^{\pi}-1)/5$；类似地有$J=2(e^{\pi}-1)/5$.

检验 $I+J=\int_0^{\pi}e^x\mathrm{d}x=e^{\pi}-1$，与答案相合.

114 求$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x\ (a,b>0)$.

解 用代换$t=\mathrm{tg}x$易得$I=\pi/2b(a+b)$.

检验 交换a,b地位：

$$\frac{\pi}{2a(a+b)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \triangleq J$$

(参考 4.2)，于是$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x = a^2J + b^2J$，与答案相反.

以上十种检验法至少可用来揭露明显的错误，若能几种方法结合使用，则检验所确立的可信度更大. 但要完全确立结果的正确性，常不免要作细的检验，在问题重要而又时间充裕的场合尤其如此.

1.5.2 细的检验

如果你以为"细的检验"意味着细心重算一遍，那就过于狭隘了. 重复演算固然不失为有用，但我们宁可推荐其它方法，至少有以下四种方法可供选择：

(i) 逆运算检验 微分与积分，展开与求和，如同乘法与除法一样可看作互逆的演算. 因此，如同可用乘法检验除法一样，亦可用微分检验积分，以求和检验展开，……，一般地，以逆运算检验原运算.

115 求 $I = \int \ln(x - \sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

解 用分部积分法：

$$I = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - 2\sqrt{x^2+1} + C.$$

检验

$$[x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - 2\sqrt{x^2+1}]'$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

答案不对，更正：$I = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$.

116 展开 $f(x) = (1-x)^{-1}(1+x^2)^{-1}$ 为 x 的幂级数.

解 用题 9 的解法：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{x+1}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_0^\infty x^n + \frac{1}{2}(1+x)\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \\
&= \sum_0^\infty (x^{4n} + x^{4n+1}).
\end{aligned}
$$

检验 用求和法：

$$
\begin{aligned}
\sum_0^\infty (x^{4n} + x^{4n+1}) &= (1+x)\sum_0^\infty x^{4n} \\
&= \frac{1+x}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}.
\end{aligned}
$$

117 设 A,B 是 n 阶方阵，A 可逆，I 是 n 阶单位阵，$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ O & I \end{pmatrix}$，求 Q^{-1}.

解 用类比法：对于 2 阶矩阵 $G = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$，直接算出 $G^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，由此推断 $Q^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

检验 作乘法 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

(ii) 改换算法检验 用两种完全不同的方法解同一算题，若两种方法出现错误的概率各为 $\epsilon(0 \leqslant \epsilon < 1)$，则同时出错的概率仅 ϵ^2，而同时得出同一错误答案的概率更小. 因此，改换算法检验有极大的可靠性.

118 求 $I = \int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$，$L$ 是正向单位圆周.

解 令 $x = \cos t, y = \sin t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，则

$$
I = -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = -2\pi.
$$

检验 设 D 是单位圆盘，则由 Green 公式有

$$I=-2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi.$$

(iii) 数值检验 这可由以下例子说明.

119 求 $S=\sum_0^\infty (n^2+1)2^{-n}/n!$

解 用题 82 的解法，利用 $n^2+1=n(n-1)+n+1$.

$$S=\sum_2^\infty \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$+\sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\sqrt{e}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{7\sqrt{e}}{4}.$$

检验 $7\sqrt{e}/4=2.885\cdots$；另一方面，

$$S\approx 1+1-\frac{5}{8}+\frac{10}{48}+\frac{17}{10\times 24}+\frac{26}{32\times 120}=2.884\cdots,$$

这表明答案是高度可信的.

(iv) 随机取值检验 设已求得某个量 $Q=f(x)$. 如 1.5.1(viii) 所述的特殊值检验固然简便，但可信度毕竟不高. 若随机地取值 x，能得到正确值 $f(x)$，那么在很可靠的程度上可断定 $Q=f(x)$ 为真. 试看一例.

120 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开 $f(x)=|\cos x|$ 为 Fourier 级数.

解 因 f 为偶函数且 $f(\pi-x)=f(x)$，故 $f(x)=2^{-1}a_0+\sum_1^\infty a_{2n}\cos 2nx$（参照 1.3.1）. 算出

$$a_{2n}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi}\quad (n\geqslant 0),$$

于是 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum_1^\infty(-1)^{n-1}(4n^2-1)^{-1}\cos 2nx$.

检验 令 $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{4}\left[f(x)-\dfrac{2}{\pi}\right]$，随机地取 $x=1.7$，有

$\varphi(1.7) = -0.3988\cdots$，另一方面，

$$\frac{\cos 3\cdot 4}{3} - \frac{\cos 6\cdot 8}{15} + \frac{\cos 10\cdot 2}{35} = -0.4006\cdots,$$

这很可靠地核验了答案的正确性.

1.6 解算题的间接方法

在数学中，"直接法"与"间接法"这一对词在多种意义上使用. 在某种意义上，几乎所有的计算有赖于间接法（例如，用定义直接计算稍难的定积分就简直不可想象）. 不过，在相对的意义上，不妨将所有具标准演算程序的方法看作直接法. 本节所称的间接法，意指所求的量 Q 不是直接求出，而是先导出 Q 满足某一关系式，然后由此关系式得出 Q. 运用间接法可能因为别无选择，也可能因为直接法不够方便.

1.6.1 递推公式法

设要求一个与整数 n 有关的量 Q_n，不妨设 $n \geqslant 1$（n 亦可从其它某个整数开始），称形如

$$Q_n = \varphi_n(Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n-1}) \tag{1.6.1}$$

的公式为递推公式. 如果已知 Q_1，则相继 $n-1$ 次运用递推公式即可求得 Q_n. 若 φ_n 实际上仅与 Q_{n-1}（或 Q_{n-2}）有关，且 φ_n 比较简单（例如 φ_n 与 n 无关），则可能由递推公式求得 Q_n 的通式.

首先考虑 $I_n = \int f^n(x)\mathrm{d}x$，利用分解 $f^n(x) = f^{n-1}(x)[1 + g(x)]$（或 $f^n(x) = f^{n-2}(x)[1 + g(x)]$）及分部积分可获递推公式.

121 求 $I_n = \int \sin^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解 利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 及分部积分得

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}(\sin^{n-1}x\cos x + I_n),$$

故
$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x (n \geqslant 2).$$

尽管不易得出 I_n 的通式，但利用 I_n 可求得

$$J_n \triangleq \int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x = \frac{(n-1)(n-3)\cdots(k+1)}{n(n-2)\cdots(k+2)}J_k,$$

其中 $k=0$ 或 1，显然 $J_0=\pi/2, J_1=1$.

122 求 $I_n = \int\cos^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解 仿上题，$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} + \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x (n \geqslant 2)$.

123 求 $I_n = \int\mathrm{tg}^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解 利用 $\mathrm{tg}^2 x = (\mathrm{tg}x)' - 1$，$I_n = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x - I_{n-2}$.

124 求 $I_n = \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^n x\mathrm{d}x$.

解 由上题得出 $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$. 直接算出 $I_0 = \pi/4$，$I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$，于是

$$I_{2m} = (-1)^m\left[\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^m}{2m-1}\right];$$

$$I_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2}\left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{(-1)^m}{m}\right](m \geqslant 1).$$

125 求 $I_n = \int(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解 $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} + \frac{x(1-x^2)^n}{2n+1}$.

注 由以上结果易导出 $\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

126 求 $I_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$ 的递推公式.

解 利用 $1=\cos^2x+\sin^2x$ 及分部积分得

$$I_n=I_{n-2}+\int\frac{\cos x\mathrm{d}\sin x}{\sin^n x}$$

$$=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}.$$

127 求 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$ 的递推公式.

解 仿上题，$I_n=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}$.

128 求 $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x$.

解 $I_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x[\sin(n-1)x+\sin(n+1)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}I_{n-1}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x(\sin nx\cos x$$

$$+\cos nx\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(I_{n-1}+I_n)-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\cos nx\mathrm{d}(\cos x)$$

(分部积分) $=\frac{1}{2}I_{n-1}+\frac{1}{2n}$,

于是归纳地得出 $I_n=\sum_1^n 2^{k-n-1}/k\ (n\geqslant 1)$.

129 求 $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\cos nx\mathrm{d}x$.

解 仿上题，首先得 $I_n=I_{n-1}/2$，然后有 $I_n=\pi/2^{n+1}$.

130 求 $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解 分别将题 128，129 中的 I_n 记作 I_n'，I_n''，则

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\sin n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\sin\frac{n\pi}{2}I_n''-\cos\frac{n\pi}{2}I_n'$$

(参考 4.2)，于是综合题 128，129 得

$$I_{2m}=-\frac{1}{4}I_{2m-2}+(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{8m-4}+\frac{1}{4m}\right),$$

$$I_{2m+1} = -\frac{1}{4}I_{2m-1}(m \geqslant 1).$$

131 求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos nx \mathrm{d}x$ 的递推公式.

解 仿上题, $I_{2m} = -I_{2m-2}/4$,

$$I_{2m+1} = -\frac{1}{4}I_{2m-1} + (-1)^m\left(\frac{1}{4m+2} + \frac{1}{8m}\right)(m \geqslant 1).$$

除积分问题外,需要推导递推公式的问题尚多,且散见于各个领域.下面是几个例子.

132 设 $S_{n,m} = \sum_1^n k^m$,求 $S_{n,2}$.

解 显然 $S_{n,0} = n, S_{n,1} = n(n+1)/2$.由

$$\begin{aligned} S_{n,3} &= \sum_0^{n-1}(k+1)^3 \\ &= \sum_1^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 1 - (n+1)^3 \\ &= S_{n,3} + 3S_{n,2} + 3S_{n,1} + n + 1 - (n+1)^3 \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} S_{n,2} &= 3^{-1}[(n+1)^3 - n - 1 - 3S_{n,1}] \\ &= 6^{-1}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

从上题得到启发,你能解一般的问题:

133 证明

$$S_{n,m} = \frac{1}{m+1}\left[(n+1)^{m+1} - n - 1 - \sum_{k=1}^{m-1}\binom{m+1}{k}S_{n,k}\right].$$

利用以上结果容易导出:

$$S_{n,3} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (S_{n,1})^2;$$

$$S_{n,4} = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1);$$

$$S_{n,5} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

134 设 $y = \cos(\beta \arcsin x)$,求 $y^{(n)}(0)$.

解 令 $\theta = \arcsin x$,

$$\text{则 } y = \cos\beta\theta, y' = -\beta\sin\beta\theta/\sqrt{1-x^2},$$

$$(1-x^2)y'' - xy' = -\beta^2 y.$$

用 Leibniz 公式对上式两端取 n 阶导数并置 $x=0$ 得 $y^{(n+1)}(0) = (n^2-\beta^2)y^{(n)}(0)$. 这结合 $y(0)=1, y'(0)=0$ 得

$$y^{(2m)}(0) = \prod_0^{m-1}(4k^2-\beta^2), y^{(2m-1)}(0) = 0 (m \geqslant 1).$$

1.6.2 代数方程法

此方法的要点是：为计算量 Q，先导出含 Q 的代数方程 $F(Q)=0$，然后解出 Q. 导出方程 $F(Q)=0$ 的一种典型方式是，对 Q 的表达式作适当变形，使之得出 $Q=\varphi(Q)$. 因变形的结果右边仍出现 Q，可以说变形使 Q"回归"，而方法的关键在于找到能回归 Q 的变形.

135 求 $I = \int \mathrm{sh}ax\sin bx\mathrm{d}x (a^2+b^2 \neq 0)$.

解 用两次分部积分得出：

$$I = a^{-1}\mathrm{ch}ax\sin bx - a^{-2}b\mathrm{sh}x\cos bx - a^{-2}b^2 I,$$

注意 I 已在右端回归. 由上式解出

$$I = (a^2+b^2)^{-1}(a\mathrm{ch}ax\sin bx - b\mathrm{sh}ax\cos bx) + C.$$

以上解法所用的"回归变形"基于分部积分法与函数 $\mathrm{sh}x$，$\sin x$ 对微分运算的"回归性"：$(\mathrm{sh}x)'' = \mathrm{sh}x$，$(\sin x)'' = -\sin x$. e^x 与 $\cos x$ 亦有类似的回归性，因此你能用上面的方法解题 36 及下题：

136 求 $I = \int \mathrm{sh}ax\cos bx\mathrm{d}x (a^2+b^2 \neq 0)$.

解 $I = (a^2+b^2)^{-1}(a\mathrm{ch}ax\cos bx + b\mathrm{sh}ax\sin bx) + C$.

137 求 $I = \int_0^1 (1+x^2)^{-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解 由 $x+1 = 2/(t+1)$ 得 $\ln(1+x) = \ln 2 - \ln(1+t)$，可试用代换 $x = \dfrac{2}{1+t} - 1 = \dfrac{1-t}{1+t}$，得到

$$I=\int_0^1\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln 2-I,$$

由此解出 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

138 求 $I=\int\sin\ln x\mathrm{d}x$.

解 $I=x\sin\ln x-\int\cos\ln x\mathrm{d}x$

$=x\sin\ln x-x\cos\ln x-I,$

由此解出 $I=2^{-1}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

注意,在上题中令 $t=\ln x$ 得 $I=\int e^t\sin t\mathrm{d}t$.

139 设 $f\in C^1[a,b]$,$f(a)=f(b)=0$,$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$,求 $I=\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

解 $I=xf^2(x)\Big|_a^b-\int_a^b[f(x)+xf'(x)]f(x)\mathrm{d}x=-1-I$,由此解出 $I=-1/2$.

140 设 $S(x)=\sum_1^\infty a_nx^n$,$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n>2)$,$a_1=a_2=1$,求 $S(x)$.

解 利用 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 可归纳地证明 $1/2\leqslant a_n/a_{n+1}\leqslant 1$,这表明 $\sum a_nx^n$ 的收敛半径 $\geqslant 1/2$. 当 $|x|<1/2$ 时,

$$S(x)=x+x^2+\sum_3^\infty(a_{n-1}+a_{n-2})x^n$$

$$=x+x^2+x[S(x)-x]+x^2S(x),$$

由此解出 $S(x)=x/(1-x-x^2)$.

一般地,若对 a_n 有递推公式 $a_n=\lambda a_{n-1}+\mu a_{n-2}+\cdots$,则可考虑导出 $S(x)=\sum a_nx^n$ 的某个方程.

141 求 $S(x)=\sum_1^\infty n^2x^n$.

解 注意到 $2n^2=(n+1)^2+(n-1)^2-2$,作变形:

$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}(n+1)^2x^n + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}(n-1)^2x^n - \sum_1^{\infty}x^n$$
$$= \frac{1}{2x}[S(x) - x] + \frac{x}{2}S(x) - \frac{x}{1-x},$$

由此解出 $S(x) = (x^2 + x)/(1-x)^3(|x| < 1)$.

当然上题亦可用逐项微分法计算(参考 6.3).

自然不排除使用方程组,下面是几个简单例子.

142 将 $f(x) = e^x + \sin x$ 表为一奇函数与一偶函数之和.

解 设 $f(x) = g(x) + h(x)$, $g(x)$ 与 $h(x)$ 分别为奇函数与偶函数,则 g, h 必满足方程组

$$g(x) + h(x) = e^x + \sin x, \quad -g(x) + h(x) = e^{-x} - \sin x,$$

由此解出 $g(x) = \mathrm{sh}x + \sin x$, $h(x) = \mathrm{ch}x$.

受上题启发,你应能解形式颇不同的下题:

143 分解 n 阶矩阵 A 为对称矩阵与反对称矩阵之和.

解 $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

1.6.3 微分方程法

将求未知函数归于解微分方程,是现代数学中的标准方法,这个方法在科学中的系统应用不在本书讨论之列.此处强调的只是微分方程对解数学计算题的某些特殊用法,它们散见于各个领域,难以规范化,且往往被忽略.

首先考虑求解"函数方程"的问题.

144 设可微函数 $f(x)$ 满足函数方程 $f(x+y) = [f(x) + f(y)]/[1 + f(x)f(y)]$,且 $f'(0) = 1$,求 $f(x)$.

解 解此题的关键在于化函数方程为微分方程.等式 $f(x+y)[1 + f(x)f(y)] = f(x) + f(y)$ 两边对 y 求导后置 $y = 0$,并用 $f'(0) = 1$ 得

$$f'(x)[1+f(x)f(0)]+f^2(x)=1.$$

在原等式中令 $y=0$ 得 $f(0)[1-f^2(x)]=0$，从而 $f(0)=0$（否则 $f^2(x)\equiv 1$，与 $f'(0)=1$ 矛盾）. 因此 $f'(x)=1-f^2(x)$，解此微分方程得 $f(x)=\operatorname{th}x$.

现在你不难仿照上面的解法解出下题.

145 设可微函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$，$f'(0)=2$，求 $f(x)$.

解 $f'(x)=f(x)+2e^x$，$f(x)=2xe^x$.

146 设 $f(x)$ 可微且 $\int_0^1 f(xy)\mathrm{d}y=nf(x)(n>0)$，求 $f(x)$.

解 关键是将原方程改造成为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=nxf(x)$，从而 $nxf'(x)=(1-n)f(x)$，于是 $f(x)=Cx^{(1/n)-1}$.

147 设 $f(x)(x>0)$ 可微且有反函数 $g(t)$，$\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=(x^{3/2}-8)/3$，求 $f(x)$.

解 很容易导出 $f'(x)=(2\sqrt{x})^{-1}$ 并解出 $f(x)=\sqrt{x}+C$，今由原方程定出 C. 以 $g(t)=(t-c)^2$，$x=0$，$f(0)=C$ 代入原方程得 $-8/3=-(1-C)^3/3$，由此解出 $C=-1$，于是 $f(x)=\sqrt{x}-1$.

148 设 $f(t)$ 连续，

$$f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v+|t^3|，求 f(t).$$

解 显然 f 为偶函数，$f(0)=0$，只需考虑 $t>0$，用球坐标计算重积分得出 $f(t)=12\pi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r+t^3$，因此 $f'(t)=12\pi t^2 f(t)+3t^2$，由此解出 $f(t)=(e^{4\pi t^3}-1)/4\pi(t\geqslant 0)$. 于是 $f(t)=(e^{4\pi|t|^3}-1)/4\pi(|t|<\infty)$.

149 设$\int_L 2(x+y)f(x)\mathrm{d}x + f(x)[x+\frac{1}{2}f^3(x)]\mathrm{d}y$与路径无关，$f(1)=1$，求$f(x)$.

解 令$z=f(x)$，由条件“$P_y=Q_x$”导出z满足方程$z'(x+2z^3)=z$，改写成$\mathrm{d}x/\mathrm{d}z=(x/z)+2z^2$. 由此解得$x=z^3$(注意$z(1)=1$)，因此$f(x)=\sqrt[3]{x}$.

形如题149的问题颇具典型性，其解法完全是标准的，主要步骤已体现于上例中.

设$S(x)=\sum a_n x^n$，则$S'(x)=\sum na_n x^{n-1}$. 若na_n可表为$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots$的某种组合(参照题140,141)，则得出$S(x)$所满足的微分方程，通常仅当a_n包含阶乘时才可能出现上述情况.

150 求$S(x)=\sum_1^\infty \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^{2n-1}$.

解 令$a_{2n-1}=(2n-2)!/[n!(n-1)!]$，则有$(2n-1)a_{2n-1}=4(2n-3)a_{2n-3}-a_{2n-3}(n\geqslant 2)$，于是(注意$a_1=1$)

$$\begin{aligned}S'(x) &= \sum_1^\infty (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} \\ &= 2+4x^2\sum_2^\infty (2n-3)a_{2n-3}x^{2n-4} \\ &\quad -\frac{1}{x}\sum_1^\infty a_{2n-1}x^{2n-1} \\ &= 2+4x^2S'(x)-x^{-1}S(x),\end{aligned}$$

即

$$S'(x)=\frac{S(x)}{x(4x^2-1)}-\frac{2}{4x^2-1}.$$

这与$S(0)=0$一起推出$S(x)=2x/(1+\sqrt{1-4x^2})(|x|<1/2)$.

151 求$S(x)=\sum_0^\infty x^{4n}/(4n)!$.

解 由$S^{(4)}(x)=S(x), S(0)=1, S^{(i)}(0)=0(i=1,2,3)$解出$S(x)=(\mathrm{ch}x+\cos x)/2$.

题150提供了导出微分方程的一种典型方法：对S'作适当

变形，使之得出 $S' = \varphi(x,S,S')$，亦即变形使得 S"回归"，这恰好对应于1.6.2中的思路. 类似于幂级数求和，"回归变形"的方法亦用于参变积分之计算. 本书将多次强调，将级数与积分对照考虑是十分有益的.

152 求 $I = \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2xy\,dx\,(a > 0)$.

解 用1.4.1 中的方法易得 $I|_{y=0} = \sqrt{\pi}/2a$. 因

$$\frac{\partial I}{\partial y} = -2\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin 2xy\,dx$$
$$= \frac{1}{a^2}e^{-a^2x^2}\sin 2xy\Big|_0^\infty - \frac{2y}{a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2xy\,dx$$
$$= -2a^{-2}yI,$$

故 $I = (\sqrt{\pi}/2a)\exp(-y^2/a^2)$.

注　类似于1.6.2中所见，回归变形乃基于"指数型函数"(e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ 等)的微分特性.

以下例子中，必要对积分用变量代换以实现所需的回归.

153 求 $I = \int_0^\infty x^{-1/2}\exp\left(-x-\frac{a}{x}\right)dx\,(a > 0)$.

解 令 $u(x) = -x - a/x$，则 $u(a/t) = u(t)$，

$$I'(a) = -\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{u(x)}dx = -\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{at}}e^{u(t)}dt$$
$$= -I(a)/\sqrt{a},$$

于是 $I(a) = I(0)e^{-2\sqrt{a}} = \sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{a}}$.

你可以用同一代换 $t = a/x$ 解下题.

154 求 $I = \int_0^\infty \exp(-x^2 - abaáx^{-2})dx\,(a > 0)$.

解 $I'(a) = -2I(a)$，$I(a) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$.

1.6.4 其它间接方法

前面几段大概会给你这样的印象：要求一个量 Q，可以不去

直接计算它．现在我们进而将间接方法推到这种地步：甚至几乎无需作什么计算，也能解决某些问题．天下再没有比“不战而胜”更痛快的事了．你在解题时倘能“不算而得”，其乐又该如何呢？如果你怀疑是否真有这样的事情，那么请看下面的例题．

155　求椭圆 $a^{-2}x^2+b^{-2}y^2=1$ 所围面积 S.

解　S 应是 a,b 的 2 次齐次函数（参看 1.5.1(vii)），试设 $S=\lambda a^2+\mu ab+vb^2$．令 $a\to 0$ 得 $0=vb^2$，因此 $v=0$；同理 $\lambda=0$，于是 $S=\mu ab$，取 $a=b$ 得 $\mu a^2=\pi a^2$，这得 $\mu=\pi$，于是 $S=\pi ab$.

如此看来，即使你完全不会积分，也能计算一些（非平凡的）面积了．仿照题 155 的解法，你应能做出以下两题．

156　求椭球 $a^{-2}x^2+b^{-2}y^2+c^2z^2\leqslant 1$ 之体积（$=4\pi abc/3$）.

157　设

$D: a^{-2}x^2+b^{-2}y^2\leqslant 1$，求 $\iint\limits_D\sqrt{1-a^{-2}x^2-b^{-2}y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$=2\pi ab/3$）.

158　求 $I=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$（$a,b\geqslant 0, a^2+b^2>0$）.

解　令 $I=I(a,b)$，则

$$I(a,0)=\pi\ln a+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{a}{2}$$

（见题 478）．易知 $I(a,b)=I(b,a)$（参考 4.2）．$\forall\, t>0$，直接验知 $I(ta,tb)=\pi\ln t+I(a,b)$，$I(1,1)=0$，这些事实使我们有理由推断 $I=\pi\ln\dfrac{a+b}{2}$.

159　求 $I=\int x^2\sin x\mathrm{d}x$.

解 此题不难经两次分部积分算出. 倘你不愿作任何积分演算，亦可用以下方法：令 $I=(Ax^2+B)\cos x+Dx\sin x+C$，则用微分得：

$$x^2\sin x=(-Ax^2-B+D)\sin x+(2Ax+Dx)\cos x,$$

由此得 $A=-1, D=B=2$，因此 $I=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$.

160 设 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+13=0$，求其最大值 z_{max} 与最小值 z_{min}.

解 你可能想立即着手用微分法，不过，要是你观察到所给方程正是球面方程：

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1,$$

那么你会从明显的几何事实得出 $z_{max}=4, z_{min}=2$，完全不必用微分法.

第二章 证明与判断

今日之大学生并不缺乏计算能力，而对数学证明似存几分畏惧. 不过，无论你对数学证明喜欢与否，你多半会承认，数学的魅力在很大程度上正是体现在它的几乎无可挑剔且奇妙无比的证明上. 如果你追随数学家的思路，领悟了某个重要结论的证明，那么你在拍案叫绝之余，不会有想亲手证明点什么的冲动吗？本章的主要目标，正是要使你树立信心：你不仅能证明许多结论，而且能证明一些初看起来很复杂的结论. 普遍认为数学推理的过程过于精巧、非常识所易理解. 然而，这是一种严重的误解，正是这种误解妨碍你去领会证明的艺术. 为了帮助你掌握一定难度的证明，本书并不推荐任何强人所难的技巧，而是强调那些容易遵循且具普遍意义的思路. 不妨郑重申明：证明的艺术，在很大程度上不过是合理组织常规思维的艺术；证明的力量源于常识之中！

2.1 对数学证明的逻辑要求

数学证明必须符合严格的逻辑要求，这是数学方法受到普遍推崇且近乎绝对信任的基本原因，也是人们对数学证明感到为难的理由之一. 过分强调严格性未必合理，但确有某些基本准则不可违背，这正是本节所要阐释的.

2.1.1 充分与必要条件

设 A,B 是两个命题. 若当 A 成立时 B 必定成立,则说"A 推出 B",或说"A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件",记作 $A\Rightarrow B$. 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$,则说 A 与 B 等价,记作 $A\Leftrightarrow B$. 必要条件与充分条件的逻辑作用不仅不同,而且可以说是相反,一旦混淆,常导致重大错误.

161 设 $a_n\geqslant 0,\sum a_n<\infty$,证明 $\sum\sqrt{a_n}/n<\infty$.

证 由 $\sum a_n<\infty$ 推出 $a_n=O(n^{-p}),p>1$. 于是 $\sqrt{a_n}/n=O(n^{-1-p/2}),1+p/2>1$,因此 $\sum\sqrt{a_n}/n<\infty$.

评论:$a_n=O(n^{-p}),p>1$ 是 $\sum a_n<\infty$ 的充分条件而非必要条件,因此不能从 $\sum a_n<\infty$ 推出 $a_n=O(n^{-p}),p>1$,证明无效.

162 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0(n\geqslant 0)$.

证 因积分 $\int_0^\infty x^ne^{-x}\mathrm{d}x(=\Gamma(n+1)$,参看 1.4.1) 收敛,故 $\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0$.

评论:认为 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛就必定 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,这种误解可能是与级数类比得到的. 确实,$\sum a_n$ 收敛推出 $a_n\to 0$,但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 不是 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件. 例如,$\int_0^\infty \sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛,但并非 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x^2=0$. 因此上述证明无效.

163 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,$f(a)=f(b)=0$,证明存在 $\xi\in[a,b]$,使 $f'(\xi)=0$.

证 $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上连续,因此必在某点 $\xi\in[a,b]$ 取得最大值,从而 $f'(\xi)=0$.

评论：若 $\xi \in (a,b)$，则 $f'(\xi)=0$ 确是 $f(\xi)$ 为极大值的必要条件，但当 $\xi = a$ 或 b 时就不然，证明未指明 $\xi \neq a,b$，因此无效. 其实，证明根本未用到条件 $f(a)=f(b)$，这肯定是行不通的.

164　设 A,B 是 n 阶可逆矩阵，证明 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证　设 I 为 n 阶单位阵，则 $ABB^{-1}A^{-1}=AA^{-1}=I$，$B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}B=I$，因此 $B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$.

评论：$F=G^{-1}$ 等价于 $GF=I$，因此 $ABB^{-1}A^{-1}=I$ 足以推出 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，验证 $B^{-1}A^{-1}AB=I$ 是多余的.

2.1.2　不得附加多余条件

解证明题的一种常见错误是不经意地将你认为需要的条件附加进来，而这是不允许的.

165　设 $a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)>0$，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

证　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则用微分中值定理得：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)>0$$

$(a<\xi<b)$.

评论：证明中用了 $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$，而这就隐蔽地附加了假定“$f$ 连续”，但 f 未必连续. 实际上，上题的证明并非很简单.

166　设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n-2/x_n)(n\geqslant 1)$，证明 $\lim\limits_n x_n=\sqrt{2}$.

证　在所给等式两边取极限得 $\lim\limits_n x_{n+1}=a=\frac{1}{2}(a+$

$2/a)$，由此解出 $a=\sqrt{2}$，因此$\lim\limits_{n} x_n=\sqrt{2}$.

评论：证明中用了$\lim\limits_{n} x_n$一定存在这一事实，但这一点正是要证明的！

167 设$f(x)$在$[a,b]$上可微，$f'(a)<\mu<f'(b)$，证明存在$c\in(a,b)$，使$f'(c)=\mu$.

证 对$f'(x)$应用"介值定理"得出所述的c存在.

评论：介值定理是对连续函数建立的，因此证明中实际上附加了"$f'(x)$连续"这一多余条件.正确的证明并非如此简单.

168 设f为连续函数，证明$I=\int_L f(xy)(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)$与路径无关.

证 令$P=yf(xy)$，$Q=xf(xy)$，则$P_y=f(xy)+(xyf'(xy)=Q_x$，因此I与路径无关.

评论：本题并无f可微的假设.

169 设级数$\sum a_n$收敛，$b_n=(1+n^{-1})^n a_n(n\geqslant 1)$，证$\sum b_n$收敛.

证 因$\lim\limits_{n} b_n/a_n=e$，故由比较判别法知$\sum b_n$收敛.

评论：比较判别法只适用于正项级数，但此题中并未假定$a_n>0$.

170 证明$\ln(1+x)<x(x>0)$.

证 因$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots$，故由Leibniz型级数的性质有$\ln(1+x)<x$.

评论：以上证法仅适用于$0<x\leqslant 1$，但题中无此假定.

2.1.3 不得循环推理

将要证的结论用来作为假设，谓之"循环推理"，乃数学中之大忌，务必避免.当然你不至公然违犯，但有时难免不自觉地掉

入循环推理的陷井中，因此有必要唤起你的警觉.

171 设 $f \in C[a,b]$，$f(a)f(b) < 0$，证明 $\exists\, \xi \in (a,b)$：$f(\xi) = 0$.

证 f 的图形是一连续曲线，它必与 x 轴交于某点 $(\xi, 0)$，因而 $f(\xi) = 0$.

评论："f 的图形与 x 轴相交"等价于"f 有零点 ξ"，这正是要证的，岂能作为证明的依据！

172 设 $u(x,y)$ 可微，证明 u_x, u_y 存在.

证 因 $\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y$ 存在，故 $\triangle x \to 0$ 时

$$u(x + \triangle x, y) - u(x,y) = u_x \triangle x + o(\triangle x).$$

上式两边除以 $\triangle x$ 后令 $\triangle x \to 0$，得出 $u_x(x,y)$ 存在.

评论：预先用到 u_x，其存在性就不必证了.

173 设 $f \in C[-a,a]$ 为偶函数，$a > 0$，证明 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

证 因 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$，故

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

评论：实际上，待证等式等价于 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$，因此后者正是要证的，不能作为依据.

174 设 $a_n > 0$，$S_n = \sum_1^n a_k$，$\sum a_n/S_n$ 收敛. 证明 $\sum a_n$ 收敛.

证 设 $S_n \leqslant M$，则 $a_n = S_n(a_n/S_n) \leqslant Ma_n/S_n$，于是由比较判别法知 $\sum a_n$ 收敛.

评论：假定 S_n 有界，无异于假定 $\sum a_n$ 收敛，证明就没意义了.

175 设 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 皆收敛，证明 $\sum c_n$ 收敛.

证 由 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ 推出 $\sum a_n \leqslant \sum c_n \leqslant \sum b_n$，可见 $\sum c_n$ 为有限数，因而级数必收敛.

评论：在未证明收敛性之前，记号 $\sum c_n$ 不能作为确定的数与 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 比较.

176 设 A 为 n 阶矩阵，A^2 可逆，证明 A 可逆.

证 因 $B = A^2$ 可逆，而 $|A| = |A^{-1}B| = |A^{-1}||B| \neq 0$，故 A 可逆.

评论：尚未证得 A 可逆，岂可用 A^{-1}！

2.1.4 反命题

正确地理解与恰当地描述反命题，是成功地运用"反证法"(见 2.5) 的前提，反命题是正命题的完全否定，因而两者严格地互斥且互补——即两者不可得兼但必居其一. 对正反命题的这一逻辑特征理解不当常常妨碍成功地运用反证法. 下面的例题将指明导致反证法失败的一些典型情况.

177 证明收敛序列 $\{x_n\}$ 有界.

证 若 $\{x_n\}$ 无界，$x_n \to a$，则当 n 充分大时 $|x_n| > |a|$，这推出 $\lim\limits_n |x_n| = |a| > |a|$，得出矛盾.

评论：首先，不等式 $|x_n| > |a|$ 不足以保证 $\{x_n\}$ 无界，因而并未真正用到 $\{x_n\}$ 无界这一假设. 其次，从 $|x_n| > |a|$ 推不出 $\lim\limits_n |x_n| > |a|$.

178 设 $f \in C[a,b]$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证 若 f 不一致连续，则存在 $\epsilon > 0$，$x \in [a,b]$，$\forall\ \delta > 0$，有 $y \in [a,b]$：$|x - y| < \delta$，$|f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon$. 这推出 f 在 x 不连续，得出矛盾.

评论：f 一致连续意味着，$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，当 $x, y \in [a, b]$，$|x-y| < \delta$ 时 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. f 不一致连续就是：$\exists\ \epsilon > 0, \forall\ \delta > 0, \exists\ x, y \in [a,b]$：$|x-y| < \delta$，$|f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon$. 对照上面的证明你会发现，证明中对不一致连续的描述是不正确的，因而并不能导出矛盾.

179　证明级数 $\sum_{1}^{\infty} n^{-1}\sin n$ 条件收敛.

证　否则 $\sum n^{-1}\sin n$ 绝对收敛；进而由 $\sin^2 n \leqslant |\sin n|$ 推出 $\sum n^{-1}\sin^2 n$ 收敛，得出矛盾(见题 249).

评论：条件收敛与绝对收敛虽互斥，但并不互补，即不能从不条件收敛推出绝对收敛. 不条件收敛也可能发散.

180　设 A 为 n 阶矩阵，I 是 n 阶单位阵，存在 $k > 0$，使 $A^k = 0$，证明 $I - A$ 可逆.

证　若 $I - A$ 不可逆，则必 $I - A = 0$，即 $A = I$，这与 $A^k = 0$ 矛盾.

评论：$I - A$ 不可逆并不意味看 $I - A = 0$，只意味着 $\det(I - A) = 0$. 因此证明无效.

2.2　证明途径之探求

你在上节看到的都是不成功的证明，但不要因此认为证明难以捉摸. 数学证明无非是开辟由假设到结论之途径，只是这条途径往往被掩盖在茫茫迷雾之中. 遇到一道证明题，你不知从何处下手，在茫然四顾之际，你会渴望一位向导指点迷津. 读了本节之后，你就会比较自信了.

2.2.1　逆推法

从结论出发，逆向探索证明之途径，常常有其便利. 设已知

A，欲证 B. 分析：要 B 成立，只需 B_1 成立；要 B_1 成立，只需 B_2 成立，…，要 B_n 成立，只需 A 成立. 于是得出证法：由 A 推出 B_n，由 B_n 推出 B_{n-1}，…，由 B_1 推出 B.

181 设 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$，证明 $f(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$.

分析：要证 $f(x)\geqslant f(0)=0(x\geqslant 0)$，只需证 $f'(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$；要证 $f'(x)\geqslant f'(0)=0(x\geqslant 0)$，只需用条件 $f''(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$. 证明的陈述甚为显然，从略.

182 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，证明 $\exists\ \xi\in(a,b)$：$f'(\xi)=[f(\xi)-f(a)]/(b-\xi)$.

分析：要证的等式可改写成：

$$0=(b-\xi)f'(\xi)-f(\xi)+f(a)$$
$$=[(b-x)f(x)+xf(a)]'_{x=\xi}.$$

令 $F(x)=(b-x)f(x)+xf(a)$，则要证 $\exists\ \xi\in(a,b)$：$F'(\xi)=0$. 由 Rolle 定理，为此只需证 $F(a)=F(b)$，这可直接验明.

许多涉及中值的问题可用以上方法解决（参看 8.4），你现在就尝试一次：

183 设 $0<a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，证明

$\exists\ \xi\in(a,b)$：$\xi f'(\xi)\ln(b/\xi)=f(\xi)-f(a)$.

184 设 $F(x,y,z)$ 是零次齐次函数，$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$. 证明曲面 $F(x,y,z)=0$ 的切平面恒过原点.

证 曲面在点 (x,y,z) 的切平面方程是

$$(X-x)F_x+(Y-y)F_y+(Z-z)F_z=0,$$

以 $X=Y=Z=0$ 代入得 $xF_x+yF_y+zF_z=0$. 可见只需证后一等式为恒等式，而这可由齐次函数的性质推出（参看 8.3）.

仿此你可证类似的问题：

185 设 $f'\neq 0$，证明曲面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 的法线恒与

z 轴相交.

2.2.2 归化法

设要证 A. 若已知 $B\Rightarrow A$，则问题归于证 B，后者也许容易些. 这种将证 A 归结为证另一个命题 B 的方法谓之归化法，它是探求证明途径的主要方法之一. 归化法的艺术在于 B 的适当选择. 理想的选择是，B 实质上与 A 等价(因而以 B 代 A 后无需证一些逻辑上与 A 无关的东西)，而形式上则比 A 简单得多，因而容易窥探出其证明途径.

将 A 归化为 B 的主要形式有两种：改变 A 的结论，或改变 A 的条件. 首先看改变结论的例子.

186 设 $0 < x_n \to a$，证明 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \to a(n\to\infty)$.

证 令 $y_n = \ln x_n$，则 $y_n \to \ln a$，于是问题归于证 $n^{-1}\sum_1^n y_i \to \ln a$，后者由题 270 得出.

在上题中，命题 A 是：收敛序列前 n 项的几何均值趋于同一极限；而命题 B 是将几何均值改为算术均值. 从形式上看，算术均值问题要简单些；但实质上 A 与 B 等价：作为练习，你不防证明 $A\Rightarrow B$(题 186 之证已显示出 $B\Rightarrow A$).

让你来解类似的问题：

187 设 $0 < x_{m+n} \leqslant x_m x_n (m,n \geqslant 1)$，证明 $\lim\limits_n \sqrt[n]{x_n}$ 存在(参考题 280).

其次考虑改变条件的例子.

188 设 a_n 单调有界，$\sum b_n$ 收敛，证明 $\sum a_n b_n$ 收敛.

证 $\{a_n\}$ 必收敛(参看(2.6.3))，设 $a_n \to a$，令 $a'_n = a_n - a$，则 $\{a'_n\}$ 单调收敛于 0，且

$$\sum_1^n a_k b_k = a\sum_1^n b_k + \sum_1^n a'_k b_k.$$

于是问题归于证 $\sum a'_n b_n$ 收敛，这由题 193 得出.

在上题中，命题 A 是“a_n 单调有界且 $\sum b_n$ 收敛推出 $\sum a_n b_n$ 收敛”；命题 B 则是将条件“a_n 单调有界”加强为“a_n 单调收敛于 0”. 从形式上看，B 似乎只是 A 的一个特款，但实质上 A，B 是等价的. 类似的“加强条件”的作法有广泛应用（参看题 270，271，276，337），下面是另一个例子：

189 设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上单调有界，$\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明 $\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

提示：考虑 $f(x)\to 0(x\to\infty)$ 这种特殊情况（参考题 192）.

2.2.3 类比法

如果对象 A，B 可以类比，那么关于 A 的命题 P 通常对应一个关于 B 的命题 Q. 一旦 P 被证明，则依据类比通常可将 P 的证法转移到 Q. 常见的类比有：低维与高维类比（曲线与曲面，切线与切面）；离散量与连续量类比（序列与函数、级数与积分），等等. 基于类比，许多问题常常成对地出现，而“配对”的问题证法很类似. 本段主要以级数与积分之间的类比为例阐明类比法的一般特征，理解这种类比是通晓微积分学的基本要素之一.

190 设 $f(x)$ 单调减，$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明 $xf(x)\to 0(x\to\infty)$.

证 由积分收敛的 Cauchy 条件（参考 3.6.3），有

$$xf(x)\leqslant 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\to 0(x\to\infty).$$

今用类似的方法解 190 的以下“配对”：

191 设 a_n 单调减，$\sum a_n$ 收敛，证明 $na_n\to 0(n\to\infty)$.

证 由级数收敛的 Cauchy 条件（参考 3.6.3），有

$$na_n \leqslant 2(n-[\frac{n}{2}])a_n \leqslant 2\sum\nolimits_{[\frac{n}{2}]}^{n} a_k \to 0(n\to\infty),$$

其中$[\frac{n}{2}]$记$\frac{n}{2}$的整数部分.

以下设 $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. 与分部积分公式

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.1}$$

类比,可建立以下恒等式(所谓 Abel 替换):

$$\sum\nolimits_n^m a_k b_k = a_m B_m - a_n B_{n-1} - \sum\nolimits_n^{m-1}(a_{k+1}-a_k)B_k, \tag{2.2.2}$$

其中 $B_n=\sum\nolimits_1^n b_k$. 由此引出一系列成对的问题.

192 设 $f\in C^1[a,\infty)$ 单调且 $f(x)\to 0(x\to\infty)$, $G(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上有界,证明积分$\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 设 $|G(x)|\leqslant M$,则由(2.2.1)有

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B fg\mathrm{d}x\right| &\leqslant |f(B)G(B)-f(A)G(A)| + \int_A^B |f'G|\mathrm{d}x \\ &\leqslant M[|f(B)|+|f(A)|] + m|f(B)-f(A)| \\ &\to 0(A,B\to\infty),\end{aligned}$$

于是由 Cauchy 收敛原理(3.5.3) 知$\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

对应的级数问题是:

193 设 $a_n \downarrow 0$, $\sum\nolimits_1^n b_k$ 有界,证明$\sum a_n b_n$ 收敛.

证 设 $|B_n|\leqslant M$,则由(2.2.2)有

$$\begin{aligned}\left|\sum\nolimits_n^m a_k b_k\right| &\leqslant |a_m B_m - a_n B_{n-1}| + \sum\nolimits_n^{m-1}(a_k-a_{k+1})|B_k| \\ &\leqslant M(a_m+a_n+a_n-a_m) \to 0(m,n\to\infty),\end{aligned}$$

于是由 Cauchy 收敛原理知$\sum a_n b_n$ 收敛.

194 设 $\int_a^{\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明 $\int_a^{\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 依题 192 的记号，再次用(2.2.1)有

$$\left|\int_A^B fg\mathrm{d}x\right| \leqslant |f(B)||G(B)-G(A)| + |G(A)||f(B)-f(A)| + M\int_A^B|f'|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant |f(B)|\left|\int_A^B g\mathrm{d}x\right| + 2M\int_A^B|f'|\mathrm{d}x \to 0(A,B\to\infty).$$

以(2.2.2)换(2.2.1)，你就能解对应的级数问题：

195 设 $\sum|a_{n+1}-a_n|$ 与 $\sum b_n$ 收敛，证明 $\sum a_nb_n$ 收敛.

再举两对类似的问题.

196 设 $x\to\infty$ 时，$xf(x)$ 收敛，$\int_a^{\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

197 设 $\{na_n\}$ 收敛，$\sum n(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，证明 $\sum a_n$ 收敛.

198 设 $f\in C^1[a,\infty)$，$\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $f(x)\downarrow 0(x\to\infty)$，证明 $\int_a^{\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

199 设 $\sum a_n$ 收敛且 $a_n\downarrow 0$，证明 $\sum n(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.

以证最后一题为例：由(2.2.2)有

$$\left|\sum_n^m k(a_{k+1}-a_k)\right| \leqslant |ma_{m-1}-na_n| + \left|\sum_n^{m-1}a_k\right|$$

$$\leqslant ma_{m-1}+na_n+\left|\sum_n^{m-1}a_k\right| \to 0(m,n\to\infty),$$

其中用到题 191 的结论.

最后考虑一个将曲线积分与定积分类比的例子.

200 证明 $\int_L u\mathrm{d}v = uv\Big|_A^B - \int_L v\mathrm{d}u$，其中 A,B 是路径 L 的起

迄点，$u,v\in C^1$.

证　类比于分部积分公式的证明，有

$$uv\big|_A^B=\int_L \mathrm{d}(uv)=\int_L u\mathrm{d}v+\int_L v\mathrm{d}u.$$

2.2.4　组合法

从 1.1 中你了解到，若要求某个量 Q 而无法直接完成，则通常将 Q 分解为 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 的某一组合：$Q=\varphi(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)$，使得可依一定的标准公式算出 $Q_i(1\leqslant i\leqslant n)$，然后得出 Q. 现在将上述思想改制成一种证明法. 设欲证某对象 A 具性质 P，可将 A 分解为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的某一组合：$A=\varphi(A_1,A_2,\cdots,A_n)$（某些情况下只需 $A\leqslant\varphi(A_1,A_2,\cdots,A_n)$），使得可依一定的标准结论或已知条件得出 A_i 有性质 P，从而推断出 A 亦具性质 P. 这一方法的关键在写出合于需要的表达式 $\varphi(A_1,A_2,\cdots,A_n)$.

201　设 $f(x),g(x)$ 连续，证明 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 连续.

证　考虑到连续函数的和、差及绝对值皆连续，只需写出 $\varphi(x)=2^{-1}[|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)]$ 就够了.

应用组合法的典型问题是收敛性证明. 一般原理是：若 $a_n=b_n+c_n+\cdots+e_n$ 或 $|a_n|\leqslant b_n+c_n+\cdots+e_n$，则从级数 $\sum b_n$，$\sum c_n,\cdots,\sum e_n$ 收敛推出 $\sum a_n$ 收敛. 对于积分的收敛性有类似结论.

202　设 $\sum a_n,\sum b_n$ 绝对收敛，证明 $\sum\max\{a_n,b_n\}$ 收敛.

证　受题 201 的启发，你容易看出只需写出 $\max\{a_n,b_n\}=2^{-1}[|a_n-b_n|+a_n+b_n)$.

203　证明 $\int_0^\infty x^{-1}\sin^3x\mathrm{d}x$ 收敛.

证　首先你应记得 $\int_0^\infty x^{-1}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛（见 1.4.6). 其次指

出分解式 $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$ 就够了.

204 设 $1 < p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1, a_n > 0, \sum a_n^q$ 收敛. 证明 $\sum n^{-1} a_n$ 收敛.

证 因 $\sum n^{-p}$ 收敛,故只要指明以下不等式:

$$\frac{a_n}{n} = \left(\frac{1}{n^p}\right)^{1/p} (a_n^q)^{1/q} \leqslant \frac{1}{pn^p} + \frac{1}{q} a_n^q$$

(参看题 813).

类似地你可解:

205 设 p, q 如上题, $f \in C[1, \infty), \int_1^\infty |f(x)|^q \mathrm{d}x$ 收敛,证明 $\int_1^\infty x^{-1} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛.

最后,看一个应用组合法的另一类例子.

206 设 $f(x) = \ln(1 + x^2) \operatorname{arctg} x \ (x > 0)$,证明 $f(x)$ 单调增.

证 直接看出 $\ln(1 + x^2)$ 与 $\operatorname{arctg} x \ (x > 0)$ 为单调增的正值函数,由此得出 $f(x)(x > 0)$ 单调增.

2.2.5 直观法

设要从条件 A 推出结论 B,如果能明显地将 A, B 解释为某种直观事实 A', B'(几何或物理上的),且从直观上考虑 A' 推出 B',则将"$A' \Rightarrow B'$"的过程转译为严格的逻辑步骤就得出所需的证明.

207 设 f 在 $[a, b]$ 上两次可微, $f(a) = f(b) = 0, f'(a) > 0, f'(b) < 0$. 证明 $\exists \xi \in (a, b): f''(\xi) = 0$.

分析:所述条件表明, f 的图形两端在 x 轴上,由点 $(a, 0)$ 进入上半平面,由下半平面进入点 $(b, 0)$,于是必与 x 轴交于第三点 $(c, 0)(a < c < b)$. 两次应用 Rolle 定理可得所要证.

2.3 计算型证明

如果要你证明$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$，实际上无异于要你计算$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$，只是预先告诉你计算结果罢了．这样的问题"证明"色彩欠缺，不在本节讨论之列．另一类问题表面上似乎不涉及计算，但实际上其证明完全依赖于一定的计算．我们称这样的证明为"计算型证明"．

2.3.1 几何问题

有了解析几何的概念之后，你很容易接受通过计算证明几何结论的想法．设证几何命题 P，首先你必须将 P 表为某个（数量或矢量的）等式（或不等式），然后通过适当演算证明此等式成立．对于几何事实与代数关系之间的对应，你必须记住一些基本结论，例如，线段 AB 与 CD 垂直 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$；$AB$ 与 CD 平行 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$，等等．

208 证明一菱形 $ABCD$ 之对角线互相垂直．

证 只要证$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，这归于下计算：

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$
$$=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2=0.$$

209 证明三角形 ABC 三边之高交于一点．

提示：设 AB，AC 上的高交于 F，证$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$．

210 证明三角形ABC两边中点联线平行于第三边且其长度为第三边的一半．

证 设 D，E 分别为 AB，AC 之中点，只要证$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，这归于以下计算：

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

211 设空间四边形 $ABCD$ 四边中点依次为 E,F,G,H，证明 $EFGH$ 为平行四边形.

提示：只要证 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HG}$.

212 证明双曲线 $a^{-2}x^2-b^{-2}y^2=1$ 上的点到两渐近线的距离之积为常数.

证 点 (x,y) 到渐近线 $bx\pm ay=0$ 的距离为 $|bx\pm ay|/\sqrt{a^2+b^2}$，当 $a^{-2}x^2-b^{-2}y^2=1$ 时

$$\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

213 证明椭圆上任一点 P 的切线与连结 P 与两焦点 F_1，F_2 的线段交成等角.

证 令 $r_i=|\overrightarrow{F_iP}|$，$r=r_1+r_2$，则 $r=\text{const}$ 为椭圆之方程，梯度 ∇r 是椭圆之法矢. 只要证 $\nabla r\cdot\overrightarrow{F_1P}/r_1=\nabla r\,\overrightarrow{F_2P}/r_2$，这由 $\nabla r=\nabla r_1+\nabla r_2$ 及 $\nabla r_i=\overrightarrow{F_iP}r_i$ 推出.

2.3.2 函数性质问题

如果要你证明给定函数为常数，或为线性函数，或为单调函数，那么你心中十分清楚，所要做的主要事情是计算导数并讨论其性质，因而你面对的是一种计算型证明.

首先考虑证 $f=\text{const}$ 的问题，这相当于证明 $f'\equiv 0$.

214 设 $f(x)$ 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^{\alpha}$，$C>0$ 与 $\alpha>1$ 与 x,y 无关，证明 $f(x)\equiv\text{const}$.

证 为证 $f'(x)=0$，只需指明

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant C|x-y|^{\alpha-1}\to 0(y\to x).$$

你试考虑更一般的问题：

215 设 $f(x)$ 满足 $|f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}$, $x=(x_1, x_2, \cdots x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $|x-y| = (\sum |x_i - y_i|^2)^{1/2}$, $C > 0$ 与 $\alpha > 1$ 与 x, y 无关，证明 $f(x) \equiv C$.

216 设 $f(z) = u + iv$ 解析，$u^2 = v$，证明 $f(z) \equiv C$.

证 只要证 $dv \equiv 0$. 由 $u^2 = v$ 及 C-R 方程有

$$v_x = 2uu_x = 2uv_y = 4u^2u_y = -4u^2v_x,$$

这推出 $v_x = 0$，从而 $v_y = 2uu_y = -2uv_x = 0$，于是 $dv \equiv 0$.

以下问题可看作是"常数问题"的推广.

217 设 $f \in C^3(-\infty, \infty)$，$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h$，$\theta$ 与 x, h 无关. 证明 f 是线性或二次函数.

证 只要证 $f'''(x) \equiv 0$. 由 Taylor 公式有:

$$f(x-h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)h^3; \tag{2.3.1}$$

$$f'(x+\theta h) = f'(x) + f''(x)\theta h + \frac{1}{2}f'''(\eta)\theta^2 h^2, \tag{2.3.2}$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间，η 介于 x 与 $x+\theta h$ 之间. 结合 (2.3.1)、(2.3.2) 与 $f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h$ 得

$$\left(\frac{1}{2} - \theta\right) f''(x) = h\left[\frac{\theta^2}{2}f'''(\eta) - \frac{1}{6}f'''(\xi)\right]; \tag{2.3.3}$$

令 $h \to 0$ 得 $(\frac{1}{2} - \theta)f''(x) = 0$. 若 $\theta \neq 1/2$，则 $f''(x) = 0$，结论已得证. 若 $\theta = 1/2$，则由 (2.5) 得 $4f'''(\xi) = 3f'''(\eta)$；令 $h \to 0$ 得 $f'''(x) = 0$.

让你来证明类似的问题:

218 设 $f \in C^4(-\infty, \infty)$，$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，$\theta$ 与 x, h 无关，证明 f 为二次或三次函数.

下面的问题证法颇不相同.

219 证明:可微的 1 次齐次函数必是线性函数.

证 设 $f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = tf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 两边对 t 求导后置 $t = 0$ 得

$\sum_1^n \frac{\partial f(0,0,\cdots,0)}{\partial x_i} x_i = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,这表明 f 是线性函数.

220 证明:周期函数的原函数是周期函数与线性函数之和.

证 设 $F'(x) = f(x) = f(x+T), T > 0$. 今证存在常数 k,使 $\varphi(x) = F(x) - kx$ 以 T 为周期,这意味着

$$F(x+T) - F(x) - kT \equiv 0. \qquad (2.3.4)$$

由 $f(x+T) = f(x)$ 推出 $F(x+T) - F(x) \equiv C = \text{const}$,代入(2.3.4)得 $k = C/T$.

221 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增, $f(0) = f'(0) = 0$,证明 $\varphi(x) = e^{-x}f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增.

证 只要证 $\varphi'(x) \geqslant 0$,这归于以下演算:

$$\begin{aligned} e^x\varphi'(x) &= f'(x) - f(x) = f'(x) - [f(x) - f(0)] \\ &= f'(x) - xf'(y) \geqslant f'(x) - f'(y) \geqslant 0 \\ &\quad (0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1). \end{aligned}$$

222 设 $f(x)$ 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的极值点. 证明 $f(\bar{x})$ 是极小值.

证 只要证 $f''(\bar{x}) > 0$,这归于以下演算:

$$\begin{aligned} f''(\bar{x}) &= \lim_{x \to \bar{x}} \left\{ \frac{1 - e^{-x}}{x} - 3[f'(x)]^2 \right\} \\ &= \lim_{x \to \bar{x}} \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) > 0. \end{aligned}$$

2.3.3 其它问题

只要某个性质 P 由一定等式 $Q = 0$ 或不等式 $Q \geqslant 0$ 刻划,

关于某个对象是否具性质 P 的证明就归于量 Q 的计算，因而是一计算型证明.

223 设 $a_n > 0, b_n = (a_n^{a_n} - 1)^2, \sum a_n$ 收敛. 证明 $\sum b_n$ 收敛.

证 由比较判别法，只要证 $l = \lim\limits_{n} b_n/a_n < \infty$.

$$l = \lim_n a_n^{-1}(a_n^{a_n} - 1)^2 = \lim_{x\to 0} x^{-1}(x^x - 1)^2$$

$$\lim_{x\to 0} x^{-1}(e^{x\ln x} - 1)^2 = \lim_{x\to 0} x\ln^2 x = 0.$$

224 设 $a_n = n^2(2 + n^{-1})^{-n}$，证明 $\sum a_n$ 收敛.

证 由根值判别法，只要证 $l = \lim\limits_{n} \sqrt[n]{a_n} < 1$. 你不难算出 $l = 1/2$.

225 证明积分 $\int_L (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

证 只要指明 $\dfrac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2 - 5y^4) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^4 + 4xy^3) = 12xy^2$.

226 设 A 是 n 阶可逆对称矩阵，证明 A^2 正定.

证 只要证明 A^2 的特征值全为正. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值，则 A^2 的特征值是 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$，由 A 可逆推出 $\lambda_i \neq 0$，从而 $\lambda_i^2 > 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

227 设 A 是一 $n \times n$ 矩阵，$A^n = 0 (n \geqslant 1)$，证明 $I - A$ 可逆.

228 设 A 是任一矩阵，证明 A^TA 对称.

229 设 $f(x)$ 连续，$f(x) = f(2x)$，证明 $f(x) =$ 常数.

230 设 $f = u + iv$ 在复平面上解析，$u =$ 常数，证明 $f =$ 常数.

2.4 数学归纳法

设 P_n 是一与 $n(\geqslant 1)$ 有关的结论.若能证明：

(i) P_1 成立；

(ii) 只要 $P_n(n\geqslant 1)$ 成立就有 P_{n+1} 成立，

则对任何 $n\geqslant 1$ 有 P_n 成立.这种证明格式称为"数学归纳法"或简称"归纳法".乍一看来上述归纳法似乎做得很少：仅证了 P_1 及 $P_n\Rightarrow P_{n+1}$；而所获甚多：$P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$ 全部获证.这并不表明数学归纳法有任何逻辑缺陷，而只是显示出它是具有高效率的方法.

不过你必须明白，并非任何问题都适于用归纳法.两个明显的前提是：要证结论与整数 $n(n\geqslant n_0$，通常 $n_0=1)$ 有关；结论 P_{n-1} 与 P_n（或 $P_k,k\leqslant n$）之间存在联系（这倒不是很强的要求），且这种联系容易被用来证明 $P_n\Rightarrow P_{n+1}$（这就难说了）.通常证明 P_1 是容易的，甚至极为平凡而可一笔带过.真正的问题在于证 $P_n\Rightarrow P_{n+1}$，这正是需要你花功夫去掌握的地方.给出一些例子让你去体会.

2.4.1 不等式之证明

对于不等式 $a_n<b_n(n\geqslant n_0)$ 的归纳证明可按完全规范的格式进行：首先验明 $a_{n_0}<b_{n_0}$，然后证明以下两不等式之一（对于(2.4.1)要求 $a_nb_n>0$）：

$$a_n/a_{n-1}<b_n/b_{n-1}(n>n_0); \tag{2.4.1}$$

$$a_n-a_{n-1}<b_n-b_{n-1}(n>n_0). \tag{2.4.2}$$

事实上，若(2.4.1)或(2,4,2)成立，则可从 $a_{n-1}<b_{n-1}$ 推出 $a_n<b_n$.若所证为 $a_n\leqslant b_n$，则(2,4,1)(2.4.2)中的 $<$ 应为 $\leqslant$.若 a_n 或 b_n 含有阶乘，则用(2.4.1)；若 a_n 或 b_n 含有"n 项和"，则用(2.

4.2).

231 证明$n! < 2^{-n}(n+1)^n (n \geqslant 2)$.

证 $n=2$时要证不等式显然成立.余下证相应于(2.4.1)的不等式:

$$n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Big/ \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} (n > 2),$$

而这归结为显然成立的不等式$(1+n^{-1})^n > 2$.

232 证明$\sum_1^n 1/\sqrt{k} < 2\sqrt{n} (n \geqslant 1)$.

证 只需证相应于(2.4.2)的不等式:

$1/\sqrt{n} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(n > 1)$,

而这由$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = 1/2\sqrt{n-\theta}(0 < \theta < 1)$推出(参考7.7.1).

看了以上两题之后,你必定认为用归纳法证不等式很容易了,于是你完全有信心独自解以下问题:

233 证明$[(n+1)!]^n < 2!4!\cdots(2n)!(n \geqslant 2)$.

234 证明$\sum_1^n \sqrt{k} < \frac{5}{6} n\sqrt{n} (n \geqslant 3)$.

并非所有不等式都适于用以上方法证明.下面考虑亦有一定典型性的另一类问题.

235 设$a > 0, x_0 \geqslant \sqrt{a}, 2x_{n+1} = x_n + ax_n^{-1}(n \geqslant 0)$,证明$x_n \geqslant \sqrt{a} (n \geqslant 0)$.

证 设$x_n \geqslant \sqrt{a}$,今要证$x_{n+1} \geqslant \sqrt{a} (n \geqslant 0)$.为此注意到$x_{n+1} = \varphi(x_n), \varphi(x) = 2^{-1}(x + ax^{-1})$.因$\varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$,故只需指明$\varphi(x)$在$x \geqslant \sqrt{a}$时单调增,而这由$\varphi'(x) = 2^{-1}(1 - ax^{-2}) \geqslant 0 (x \geqslant \sqrt{a})$推出.

你可立即将如上证法标准化如下:设$x_0 \geqslant b, x_{n+1} = \varphi(x_n)(n \geqslant 0), \varphi(b) = b$,则证$x_n \geqslant b(n \geqslant 0)$归于证$\varphi'(x) \geqslant 0(x$

$\geqslant b$). 基于此，对于下述看来有点复杂的问题你就毫不费力了.

236 设 $a>0, x_0 \geqslant \sqrt{a}, x_{n+1}=x_n(x_n^2+3a)/(3x_n^2+a)$，证明 $x_n \geqslant \sqrt{a}$.

2.4.2 等式之证明

首先，基于简单的类比，可将上段中用于证 $a_n \leqslant b_n$ 的方法改制成证 $a_n=b_n$ 的方法. 例如，类比于(2.4.2)，若能证

$$a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} (n > n_0), \qquad (2.4.3)$$

且已验证 $a_{n_0}=b_{n_0}$，则可断定 $a_n=b_n(n \geqslant n_0)$. 许多"n 项和"的公式可用此法来证明.

237 证明 $\sum_1^n k^3 = 4^{-1}n^2(n+1)^2 (n \geqslant 1$，参考题 133).

证 $n=1$ 时要证等式显然成立. 余下证相应于(2.4.3)的等式

$$4n^3 = n^2(n+1)^2 - n^2(n-1)^2 (n > 1), \qquad (2.4.4)$$

而这是明显的.

238 证明 $\sum_1^n \operatorname{arctg}(2k^2)^{-1} = \operatorname{arctg}[n/(n+1)] (n \geqslant 1)$.

证 只需证明相应于(2.4.3)的等式：

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} - \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n} (n > 1),$$

而这由熟知的如下恒等式推出：

$$\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} (0 < x, y < 1).$$

仿此，你能解如下两个类似问题.

239 证明 $\sum_1^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1) (n \geqslant 1)$.

240 证明 $\sum_1^n \sin kx = \sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2} / \sin\frac{x}{2} (n \geqslant 1)$ (参照 413).

题 237，238 的证法亦可从另一思路导出：设要证 $a_n = b_n$(n

$\geqslant n_0$)，若已知递推公式 $a_{n+1}=\varphi_n(a_n)$，则可将证“$a_n=b_n\Rightarrow a_{n+1}=b_{n+1}$”转化为证 $\varphi_n(b_n)=b_{n+1}$. 这一思路用于题 237，就是证

$$4^{-1}n^2(n+1)^2+(n+1)^3=4^{-1}(n+1)^2(n+2)^2(n\geqslant 1),$$

这与(2.4.4)式正好相合. 以上思路的好处在于，它适用于比题 237 ~ 240 更广泛的问题，因此处仅用到某种递推公式，而无需 a_n 或 b_n 具和式结构. 典型的应用是证 n 阶导数公式，此时 $y^{(n+1)}=(y^{(n)})'$ 就是一自然的递推公式. 且看下例.

241 证明 $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(1+x^2)^{-(n+1)/2}\sin[(n+1)\mathrm{arcctg}x](n\geqslant 1)$

证 令 $r=\sqrt{x^2+1}$，$\theta=\mathrm{arcctg}x$，则 $r'=x/r$，$\theta'=-1/r^2$. 设 $[1/(1+x^2)]^{(n)}=(-1)^n n!r^{-n-1}\sin(n+1)\theta$，则

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n+1)}&=(-1)^n n![-(n+1)r^{-n-3}x\sin(n+1)\theta\\&\quad-(n+1)r^{-n-3}\cos(n+1)\theta]\\&=(-1)^{n+1}\,!\,r^{-n-2}[\sin(n+1)\theta\cos\theta\\&\quad+\cos(n+1)\theta\sin\theta]\\&=(-1)^{n+1}(n+1)!r^{-n-2}\sin(n+2)\theta.\end{aligned}$$

这正好为所要证.

2.4.3 其它问题

以上两段你看到的是归纳法的标准使用. 然而，这毕竟是较特殊的情况. 归纳法在数学中应用如此广泛，要将其使用形式归结为少数几个标准类型是不可能的. 本段考虑应用归纳法的其它一些例子，它们散见于数学的不同部门，虽未必堪称典型，但足以体现归纳证明的基本特征.

242 设 $f(x)$ 满足 $f(\lambda x+\mu y)\leqslant\lambda f(x)+\mu f(y)(0<\lambda=1-\mu<1,-\infty<x,y,<\infty)$，证明 $f(x)$ 必满足 $f(\sum\lambda_i x_i)$

$\leqslant \sum \lambda_i f(x_i)(\lambda_i > 0, \sum \lambda_i = 1, -\infty < x_i < \infty, 1 \leqslant i \leqslant n)$.

证 设结论已对 $n(\geqslant 2)$ 证明，给定 $x_i, \lambda_i; \lambda_i > 0, \sum \lambda_i = 1, 1 \leqslant i \leqslant n+1$). 令 $\mu = 1 - \lambda_{n+1}$，则

$$\begin{aligned} f\left(\sum_1^{n-1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\mu \sum_1^n \mu^{-1} \lambda_i x_i + \lambda_{n-1} x_{n+1}\right) \\ &\leqslant \mu f\left(\sum_1^n \mu^{-1} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) \\ &\leqslant \mu \sum_1^n \mu^{-1} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_1^{n+1} \lambda_i f(x_i), \end{aligned}$$

其中用到归纳假设与 $\sum_1^n \mu^{-1} \lambda_i = 1$.

如果你想掌握以上证法，不防自己试证如下类似问题.

243 设 A 是某向量空间 V 中的点集，它有性质：若 $a, b \in A, 0 < \lambda < 1$，则 $\lambda a + (1-\lambda) b \in A$. 证明：若 $a_i \in A, \lambda_i > 0$, $\sum \lambda_i = 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$，则 $\sum \lambda_i a_i \in A$.

244 证明：初等函数的导数仍为初等函数

分析：此题难处在于：你一时不知归纳证明所不可缺少的 n 在哪儿. 回顾一下初等函数的定义：初等函数就是由基本初等函数及其反函数通过算术运算及复合所得的函数. 规定施行一次算术运算或复合为一次构成，那么归纳证明正是对构成次数 n 而施行. 显然基本初等函数的导数皆为初等函数. 设经 n 次构成的函数之导数为初等函数，$f(x)$ 是由基本初等函数经 $n-1$ 次构成而得，则必 $f(x) = g(h(x))$，或 $f(x) = g(x) + h(x)$，或 $f(x) = g(x)h(x)$，或 $f(x) = g(x)/h(x)$，其中 $g(x), h(x)$ 是由基本初等函数不超过 n 次构成而得之函数，于是由基本微分规则及归纳假设得出 $f'(x)$ 为初等函数.

245 设 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同零点且 n 次可微，证明 $\exists \xi$: $f^{(n)}(\xi) = 0$.

证 $n=1$ 时由 Rolle 定理得出. 设结论已对 n 次可微函数证明. 若 $f(x)$ 有 $n+2$ 个零点且 $n+1$ 次可微, 则由 Rolle 定理知 $f'(x)$ 有 $n+1$ 个零点, 于是由归纳假设知 $\exists\ \xi: f^{(n+1)}(\xi)=[f'(x)]^{(n)}_{x=\xi}=0$.

注意上面证明中归纳假设用于 $f'(x)$, 而不是用于 $f(x)$ 本身, 这在归纳证明中是很常见的, 你从以下问题的证明中也会体会到这一点.

246 设 $n>0, f^{(n)}(x)>0(x>a), f^{(k)}(a)=0(0\leqslant k<n)$, 证明 $f(x)>0(x>a)$.

2.5 反 证 法

设要证结论 A. 若不直接证 A, 而是指出 A 不成立将引出什么矛盾, 从而肯定 A 必成立, 那么所用的就是"反证法". 反证法在逻辑上自然无可怀疑, 但颇有些神秘色彩: 似乎还根本未直接触及 A, 证明就已结束, 几乎令人难以置信. 反证法的成功无疑会强烈激发你的兴趣, 你会跃跃欲试! 再没有别的方法象反证法那样适于检验一个人的数学思维能力了.

自然, 并非每道证明题都宜用反证法. 为用反证法来证明 A, 必须是"A 不成立"这件事易于推论, 而 A 本身成立的直接理由又不明显. 成功地应用反证法的关键, 在于找到"A 不成立"的适当描述. 本节的例子会给你提供一些启发.

2.5.1 极限与收敛性问题

首先, 你要能正确且恰当地表出一个极限结论的反面. 例如, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 的反面是: 存在 $\varepsilon>0$ 与 $x_n\to\infty$, 使得 $|f(x_n)|\geqslant\varepsilon$.

247 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 内一致连续，$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

证 若结论不真，则有 $\epsilon>0, x_n\to\infty$，使得 $|f(x_n)|\geqslant\epsilon$. 可设 $f(x_n)\geqslant\epsilon$. 由一致连续性，有 $\delta>0$，使当 $x,y\geqslant 0, |x-y|\leqslant\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\epsilon/2$. 于是

$$\int_{x_n}^{x_n+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\delta f(x_n)-\int_{x_n}^{x_n+\delta}|f(x)-f(x_n|\mathrm{d}x\geqslant\frac{\epsilon\delta}{2},$$

这与 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾（参考 2.6.3）.

248 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，对任给 $x\geqslant 0$ 有 $\lim\limits_{n}f(x+n)=0$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

证 设 ϵ, x_n 如上题之证，不防设 $x_n-[x_n]\to a$. 由 $x_n-(a+[x_n])\to 0$ 及一致连续性有 $f(x_n)-f(a+[x_n])\to 0$，故

$$\epsilon\leqslant f(x_n)=[f(x_n)-f(a+[x_n])]+f(a+[x_n])\to 0,$$

得出矛盾.

证明“发散性”时应利用已知的敛散性结论.

249 证明 $\sum_1^\infty n^{-1}|\sin n|$ 发散.

证 若 $\sum n^{-1}|\sin n|$ 收敛，则 $\sum n^{-1}\sin^2 n$ 亦收敛，这与 $\sum n^{-1}\cos^2 n$ 收敛（题 40）一起推出 $\sum n^{-1}$ 收敛，得出矛盾.

于是你可证类似的问题：

250 证明 $\int_0^\infty x^{-1}|\sin x|\mathrm{d}x$ 发散.

251 证明 $\lim\limits_{n}\sin n$ 不存在.

证 若存在 $l=\lim\limits_{n}\sin n$，则

$$0=\lim_{n}[\sin(n+2)-\sin n]=\lim_{n}2\cos(n+1)\sin 1,$$

这推出 $\cos n\to 0$，结合 $\sin 2n=2\sin n\cos n$ 得 $l=0$，于是 $\sin^2 n+$

$\cos^2 n \to 0$，得出矛盾.

2.5.2 函数性质问题

要证 $f(x)$ 不具性质 P，可适当选取 P 的某个推论 Q，使得当 f 具有 Q 时导致矛盾.

252 证明 $f(x)=\sin x^3$ 非周期函数.

证 若 $f(x)$ 是以 $T(>0)$ 为周期的函数，则 $f'(x)=3x^2\cos x^3$ 亦是，从而 $f'(x)$ 有界，这与 $f'(\sqrt[3]{2n\pi})\to\infty(n\to\infty)$ 矛盾.

253 证明 $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上非一致连续.

证 若 $f(x)$ 一致连续，则对任何 x_n,y_n，当 $x_n-y_n\to 0$ 时必 $f(x_n)-f(y_n)\to 0$（这一刻划是关键！）. 但取 $x_n=\sqrt{2n\pi}$，$y_n=\sqrt{2n\pi+\pi/2}$ 得出 $x_n-y_n\to 0$，$f(x_n)-f(y_n)=-1$！

254 证明 $f(x)=\sin x^\alpha(\alpha>1)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上非一致连续.

255 设在 $[a,b]$ 上 $f''(x)+g(x)f'(x)=f(x)$，$f(a)=f(b)=0$，证明 $f(x)\equiv 0(a\leqslant x\leqslant b)$.

证 只要证 $f(x)\geqslant 0$（同理可证 $f(x)\leqslant 0$），为此只需证 $m=\min f(x)\geqslant 0$. 取 x_0：$f(x_0)=m$. 若 $f(x_0)<0$，则必 $a<x_0<b$，因此 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=f(x_0)<0$，这得出 $f(x_0)$ 是极大值，矛盾.

256 设存在 $A>0$，使在 $[a,b)$ 上 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$；$f(a)=0$. 证明 $f(x)\equiv 0(a\leqslant x<b)$.

证 若 $f(x)\not\equiv 0$，令 $a=\inf\{x:f(x)\neq 0\}$，则 $a\leqslant a_1<b$，$f(a_1)=0$. 取 $b_1\in(a_1,b)$，使 $f(b_1)\neq 0$ 且 $b_1-a_1<1/2A$. 取 $b_2\in(a_1,b_1)$，使 $|f(b_1)|=|f(b_1)-f(a_1)|=|f'(b_2)(b_1-a_1)|\leqslant\frac{1}{2}|f(b_2)|$，…，如此得 $b_1>b_2>\cdots>b_n>a_1$，$|f(b_1)|\leqslant$

$2^{-n+1}|f(b_n)| \to 0(n \to \infty)$,得出矛盾.

若你充分理解了上题,就能证更一般的:

257　设 $\beta \neq 0, f(a) = 0$, 在 $[a,b)$ 上 $|f(x)g(x) + \beta f'(x)| \leqslant |f(x)|, |g(x)| \leqslant M$,证明 $f(x) \equiv 0(a \leqslant x < b)$.

关于中值问题的证明可注意以下事实:"$\exists\ \xi: f(\xi) = 0$"的反面是"$\forall\ x: f(x) \neq 0$";"$\exists\ \xi: f^{(k)}(\xi) = 0$"$(k > 0)$的反面是"$\forall\ x: f^{(k)}(x) > 0$"(或"$f^{(k)}(x) < 0$"),等等.

258　设 $f(a) = f(b) = 0$, 在 (a,b) 内 $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$,证明 $\exists\ \xi \in [a,b]: g(\xi) = 0$.

证　否则对 $f(x)/g(x)$ 应用 Rolle 定理得出矛盾.

259　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内两次可微且有界.证明 $\exists\ \xi$: $f''(\xi) = 0$.

证　否则可设 $f''(x) > 0$, 从而 $f'(x)$ 严格增加. 取 x_0: $f'(x_0) \neq 0$. 若 $f'(x_0) > 0$,则 $x > x_0$ 时

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t >$$
$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \to \infty(x \to \infty),$$

得出矛盾. 当 $f'(x_0) < 0$ 时有 $f(x) \to \infty(x \to -\infty)$,亦得矛盾.

260　设 $f \in C[0,1]$, $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0(0 \leqslant k < n)$,证明 $\exists\ \xi \in (0,1): |f(\xi)| > 2^n(n+1)$.

证　若 $|f(x)| \leqslant 2^n(n+1)(0 < x < 1)$,则(此处有点技巧)

$$1 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2^n(n+1)\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n \mathrm{d}x = 1.$$

因上式中的 $\leqslant$ 必须为 $=$,故 $|f(x)| = 2^n(n+1)$;由连续性及 $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1$ 知 $f(x) = 2^n(n+1)$,这与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾.

261　设 $f(x) = g(x) + h(x)$, $h(x)$ 是 n 次多项式,

$g^{(n+1)}(x)$ 无零点，证明 $f(x)$ 至多 $n+1$ 个零点.

证 设 $f(x)$ 有 $n+2$ 个零点，则用 $n+1$ 次 Rolle 定理得出 ξ：$f^{(n+1)}(\xi)=g^{(n+1)}(\xi)=0$，得出矛盾.

262 设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=0<f(x)(a<x<b)$，f 在 (a,b) 内可微. 证明 $f'(x)/f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

证 令 $g(x)=\ln f(x)$，取定 $c\in(a,b)$. 若 $g'(x)=f'(x)/f(x)$ 有界，则 $g(x)=g(c)+(x-c)g'(\xi_x)$ 有界，这与 $g(x)\to-\infty(x\to a)$ 矛盾.

2.6 有关极限的证明题

在前面你已看到不少有关极限的证明题了，本节将提供若干更系统的方法. 只要涉及极限，你大概会立即联想到"$\epsilon-N$"或"$\epsilon-\delta$"方法. 这套方法已有辉煌历史，但迄今仍然声誉欠佳，不喜欢它的人深感别扭. 幸而它并非无可替代. 本节特意强调几种"非 $\epsilon-\delta$ 方法"，它们往往更加方便且有效，值得优先选用.

2.6.1 挤压法

此方法可能最容易为你所理解与熟悉，它基于以下简单原理：若 $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$，$a_n\to A$，$b_n\to A$，则必 $x_n\to A$. 应用此法的关键在于找到"挤压"x_n 的 a_n 与 b_n，这当然依赖于 x_n 的具体结构，并无通用的方案. 大体说来，a_n 与 b_n 分别为 x_n 的一个适度缩小与放大. 若 $x_n=\sum_{k=1}^{n}x_{nk}$，则应寻求 x_{nk} 的适度缩小与放大：$a_{nk}\leqslant x_{nk}\leqslant b_{nk}$，使得 $a_n=\sum\limits_k a_{nk}$ 与 $b_n=\sum\limits_k b_{nk}$ 构成 x_n 的所需挤压.

263 设 $x_n=\sum_1^n(\sqrt{1+kn^{-2}}-1)$，证明 $x_n\to 1/4$.

证 关键在于注意到.

$$\frac{k}{n(2n-1)} \leqslant \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{k}{n(\sqrt{n^2+k}+n)} \leqslant \frac{k}{2n^2};$$

然后利用 $\sum_1^n k = n(n+1)/2$ 即得所要证.

类似地，你可利用 $(n-1)^k \leqslant n^k - 1 \leqslant n^k$ 证

$$x_n = \sum_1^n (n^k - 1)^{-1/k} \to 1.$$

264 设 $x_n = \sum_1^n n^{-1}(\ln k/\ln n)^p, p \geqslant 1$，证明 $x_n \to 1$.

证 由 $\ln^p x (x \geqslant 1)$ 单调增得出（参考 7.6.2）

$$\int_1^n \ln^p x \mathrm{d}x \leqslant \sum_1^n \ln^p k \leqslant \int_1^{n+1} \ln^p x \mathrm{d}x.$$

故 $$\frac{1}{n\ln^p n}\int_1^n \ln^p x \mathrm{d}x \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n\ln^p n}\int_1^{n+1} \ln^p x \mathrm{d}x.$$

用 L'Hospital 方法得

$$\lim_n \frac{1}{x\ln^p n}\int_1^n \ln^p t \mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ln^p x}\int_1^x \ln^p t \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^p x}{\ln^p x + p\ln^{p-1} x} = 1;$$

同理 $\int_1^{n+1}(\ln^p x/n\ln^p n)\mathrm{d}x \to 1$，于是 $x_n \to 1$.

265 设 $x_n = \sum_1^n \ln(1+\frac{1}{2n+k})$，证明 $x_n \to \ln\frac{3}{2}$.

证 利用中值定理得（参考 7.7.1）

$$\frac{1}{2n+k+1} < \ln(1+\frac{1}{2n+k}) = \ln(2n-k+1) - \ln(2n+k)$$

$$= \frac{1}{2n+k+\theta_{nk}} < \frac{1}{2n+k}(0 < \theta_{nk} < 1).$$

利用定积分定义有

$$\sum_1^n \frac{1}{2n+k} = \sum_1^n \frac{1}{n}(2+\frac{k}{n})^{-1} \to \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\frac{3}{2};$$

同理 $\sum_1^n (2n+k+1)^{-1} \to \ln(3/2)$，于是 $x_n \to \ln(3/2)$.

以上两题表明，为有效地运用挤压法，熟悉某些不等式证法

(见第七章)是必要的.

266 设 $x_n=\left[\int_0^{\pi/2}(1+\sin t)^n\mathrm{d}t\right]^{1/n}$,证明 $x_n\to 2$.

证 利用 $4x/\pi\leqslant 1+\sin x\leqslant 2(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$ 易得 $2\sqrt[n]{\pi/2(n+1)}\leqslant x_n\leqslant 2\sqrt[n]{\pi/2}$,由此立得所要证.

267 设 $x_n=\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$,证明 $x_n\to 2$.

证 由 $n^2\leqslant k\leqslant (n+1)^2$ 推出 $1/(n+1)\leqslant 1/\sqrt{k}\leqslant 1/n$,因此 $(2n+1)/(n+1)\leqslant x_n\leqslant 2(n+1)/n$,由此立得所要证.

268 设 $a_n\downarrow 0$,$\sum a_n=\infty$,$x_n=\sum_1^n a_{2k}\Big/\sum_1^n a_{2k-1}$,证明 $x_n\to 1$.

提示:指明 $1-(a_1-a_{2n+1})(\sum_1^n a_{2k-1})^{-1}\leqslant x_n\leqslant 1$.

挤压法显然亦可用于函数极限:若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,当 $x\to a$ 时 $g(x)\to A$,$h(x)\to A$,则 $f(x)\to A(x\to a)$.

269 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调增、有界、两次可微且 $f''(x)\leqslant 0$,证明 $f'(x)\to 0(x\to\infty)$.

证 当 $0<h<x$ 时由 Taylor 公式有

$$\begin{aligned}f(x-h)&=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x-\theta h)h^2\\&\leqslant f(x)-f'(x)h\ (0<\theta<1),\end{aligned}$$

于是 $0\leqslant f'(x)\leqslant h^{-1}[f(x)-f(x-h)]$. 由 $f(x)$ 单调有界知有 $f(x)\to A(x\to\infty)$;同理 $f(x-h)\to A(x\to\infty)$. 因此 $h^{-1}[f(x)-f(x-h)]\to 0$,于是 $f'(x)\to 0(x\to\infty)$.

2.6.2 上下极限法

若 $\{x_n\}$ 有子列 $x_{n_k}\to A$,且对任何 $B>A$,$\{x_n\}$ 没有子列收敛于 B.,则称 A 为 $\{x_n\}$ 的上极限,记作 $A=\overline{\lim\limits_n}x_n$,约定 $\underline{\lim\limits_n}x_n$

$= -\overline{\lim_n}(-x_n)$(下极限). 上下极限具有以下性质:

$$\underline{\lim_n} x_n + \underline{\lim_n} y_n \leqslant \underline{\lim_n} x_n (x_n + y_n); \quad (2.6.1)$$

$$\overline{\lim_n}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_n} x_n + \overline{\lim_n} y_n; \quad (2.6.2)$$

$$\underline{\lim_n} x_n \ \underline{\lim_n} x_n y_n \leqslant \underline{\lim_n} x_n x_n y_n; \quad (x_n, y_n \geqslant 0) \quad (2.6.3)$$

$$\overline{\lim_n} x_n y_n \leqslant \overline{\lim_n} x_n \ \overline{\lim_n} y_n; \quad (2.6.4)$$

$$x_n \leqslant y_n \Rightarrow \overline{\lim_n} x_n \leqslant \overline{\lim_n} y_n \quad (2.6.5)$$

若$\{x_n\}$收敛,则(1)～(4)为等式. 其次,

$$\lim_n x_n = A \Leftrightarrow \overline{\lim_n}|x_n - A| \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{\lim_n} x_n \leqslant A \leqslant \underline{\lim_n}. \quad (2.6.6)$$

利用(2.6.6),可将证$\lim_n x_n = A$归化为证涉及上下极限的一个不等式,而后者可由基于(2.6.1)～(2.6.5)的"上下极限演算"来完成. 运用上下极限的好处在于,上下极限总存在(但可能为$\pm\infty$),而运用不等式比用等式要自由些. 即使对上下极限起初有些陌生,一旦熟悉之后你会发现它是一个非常方便与有效的工具.

270 设$a_n \to a$, $A_n = \sum_1^n a_k/n$, 证明$A_n \to a$.

证 可设$a = 0$(否则以$a_n - a$代a_n). 任取$m \geqslant 1$,令$b_m = \sup_{k \geqslant m}|a_k|$,则由$a_n \to 0$推出$b_m \to 0 (m \to \infty)$. 由

$$\overline{\lim_n}|A_n| \leqslant \overline{\lim_n} \frac{1}{n} \left|\sum_1^m a_k\right| + \overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{m+1}^n |a_k|$$

$$\leqslant \overline{\lim_n} \frac{n-m}{n} b_m = b_m.$$

得出$\overline{\lim_n}|A_n| \leqslant 0$,因此$A_n \to 0$.

以上证明由一串演算完成而无需任何$\varepsilon - N$介入,它会使你耳目一新. 你不防独自一试:

271　设$a_n \to a$，$\lambda_n > 0$，$\sum_1^\infty \lambda_n = \infty$，$A_n = \sum_1^n \lambda_k a_k \Big/ \sum_1^n \lambda_k$，证明$A_n \to a$.

即使更难点的问题，用上下极限法亦易对付.

272　设$b_{n+1} > b_n$，$b_n \to \infty$，$l = \lim\limits_n (a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)$，证明$\lim\limits_n a_n/b_n = l$.

证　令$x_1 = a_1$，$y_1 = b_1$，$x_n = a_n - a_{n-1}$，$y_n = b_n - b_{n-1}$（$n > 1$），则$\sum_1^n x_k = a_n$，$\sum_1^n y_k = b_n$，$x_n/y_n \to l$. 可设$l = 0$（否则以$x_n - l y_n$代x_n），于是$z_n = \sup\limits_{k \geqslant n} |x_k/y_k| \to 0 (n \to \infty)$. 由

$$\overline{\lim_n}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \overline{\lim_n}\frac{|a_m|}{b_n} + \overline{\lim_n}\frac{|x_{m+1}| + \cdots + |x_n|}{b_n}$$

$$\leqslant \overline{\lim_n}\frac{z_m(y_{m+1} + \cdots + y_n)}{b_n} = \lim_n \frac{z_m(b_n - b_m)}{b_n} = z_m.$$

得$\overline{\lim\limits_n}|a_n/b_n| \leqslant 0$，因此$a_n/b_n \to 0$.

上下极限概念及其性质可以自然的方式推广于函数，且亦可用来处理函数极限问题. 因此，你可以尝试用题 270 ～ 272 的解法解对应的问题：

273　设$f \in C[0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$，证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = a$.

274　设$f, g \in C[0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$，$g(x) > 0$，$\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x = \infty$，证明$\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = a$.

注　用一个推广的 H'Lospital 法，以上两题的证明更为简单.

275　设$g(x + a) > g(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$，$a > 0$，$l = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x + a) - f(x)]/[g(x + a) - g(x)]$，$f$在有限区间上有界. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$.

本题对应于 272，它的证法可从下面这个较简单的问题的证明仿制出来.

276 设 f 在有限区间上有界，$l=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}f(x)=l$.

证 可设 $l=0$（否则以 $f(x)-lx$ 代 $f(x)$）. 令 $\varphi(x)=\sup\limits_{y\geqslant x}|f(y+1)-f(y)|$，则 $\varphi(x)\to 0(x\to\infty)$. 任取 $b>0$；$\forall\ x>0$，有唯一整数 n_x：$b\leqslant x-n_x<b+1$. 于是

$$\begin{aligned}\varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &\leqslant \varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{f(x-n_x)}{x}\right|\\ &+\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n_x-1}|f(x-k)-f(x-k-1)|\\ &\leqslant \varlimsup_{x\to\infty}\frac{n_x\varphi(b)}{x}\leqslant\varphi(b).\end{aligned}$$

令 $b\to\infty$ 得 $\varlimsup\limits_{x\to\infty}|x^{-1}f(x)|\leqslant 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}f(x)=0$.

277 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=l$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}f(x)=l$.

此题可从题 276 推出. 如用题 276 的证法直接证，则因可用中值定理而更简单：

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(b)}{x}\right|+\left|\frac{x-b}{x}\right|f'(\xi_x)(b<\xi_x<x).$$

278 设 $x_{n+2}-x_n\to 0$，证明 $(x_{n+1}-x_n)/n\to 0$.

提示：注意 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant|x_{m+1}-x_m|+\sum_m^{n-1}|x_{k+2}-x_k|$.

279 设 $f\in C[0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+2)-f(x)]=0$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}[f(x+1)-f(x)]=0$.

280 设 $x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$，证明 $\{n^{-1}x_n\}$ 收敛.

证 令 $A=\inf\limits_{n\geqslant 1}n^{-1}x_n$，则 $\varliminf\limits_{n}n^{-1}x_n\geqslant A$. 取定 $m\geqslant 1$. $\forall\ n>$

m，有整数 p_n, q_n：$n = mp_n + q_n, 0 \leqslant q_n < m$，于是 $\overline{\lim_n} \frac{x_n}{n} \leqslant \overline{\lim_n} \frac{p_n x_m + x_{q_n}}{n} = \overline{\lim_n} \frac{p_n x_m}{n} = \frac{x_m}{m}$，

由此得 $\overline{\lim_n} n^{-1} x_n \leqslant A$. 因此 $n^{-1} x_n \to A$.

仿此你可以证明对应的函数极限问题：

281　设 $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$，$f \in C[0,\infty)$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1} f(x) = \inf\limits_{x>0} x^{-1} f(x)$.

282　设 $f \in C[0,\infty)$，$0 < f(x+y) \leqslant f(x)f(y)$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)]^{1/x} = \inf\limits_{x>0} [f(x)]^{1/x}$.

283　设 $f \in C^1[0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty} [f'(x) + f(x)] = 0$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

证　令 $\varphi(x) = e^x f(x)$，$g(x) = \sup\limits_{y \geqslant x} |f'(x) + f(x)|$，则 $\varphi'(x) = e^x [f'(x) + f(x)]$，$g(x) \to 0 (x \to \infty)$. $\forall\, b > 0$，有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to\infty}} |f(x)| &= \overline{\lim_{x\to\infty}} e^{-x} |\varphi(x)| = \overline{\lim_{x\to\infty}} e^{-x} \left| \varphi(b) + \int_b^x \varphi'(t) \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \overline{\lim_{x\to\infty}} e^{-x} \int_b^x e^t |f'(t) + f(t)| \mathrm{d}t \\ &\leqslant g(b)\, \overline{\lim_{x\to\infty}} e^{-x} (e^x - e^b) = g(b),\end{aligned}$$

令 $b \to \infty$ 得 $\overline{\lim_{x\to\infty}} |f(x)| \leqslant 0$，因此 $f(x) \to 0 (x \to \infty)$.

284　设 $f \in C^1[0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty} [xf'(x) + 2f(x)] = 0$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

提示：利用 $[x^2 f(x)]' = x^2 f'(x) + 2xf(x)$.

285　设 $f \in C^2[0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且有限，$|f''(x)| \leqslant M$. 证明 $f'(x) \to 0 (x \to \infty)$（参照题 269）.

证　任给 $x, h > 0$，有 $f(x+h) = f(x) + f'(x)h +$

$\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2(0<\theta<1)$，于是

$$\varlimsup_{x\to\infty}|f'(x)|\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}h^{-1}[f(x+h)-f(x)]+\frac{Mh}{2}=\frac{Mh}{2}.$$

令 $h\to 0$ 得 $\varlimsup_{x\to\infty}|f'(x)|\leqslant 0$，因此 $f'(x)\to 0(x\to\infty)$.

286 设 $f\in C[a,b]$，$0\leqslant f(x)<1(a\leqslant x<b)$，证明 $\lim_{n}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x=0$.

证 令 $\varphi(t)=\max_{a\leqslant x\leqslant t}f(x)$，则 $0\leqslant\varphi(t)<1(a\leqslant t<b)$，

$$\varlimsup_{n}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n}(b-a)\varphi^n(t)+b-t=b-t,$$

令 $t\to b$ 得所要证.

2.6.3 收敛原理

Cauchy 收敛原理 序列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\lim_{m,n\to\infty}(x_m-x_n)=0$；$x\to\infty$ 时 $f(x)$ 收敛 $\Leftrightarrow\lim_{x,y\to\infty}[f(x)-f(y)]=0$.

以上收敛原理在一些具体场合可能表为别的形式. 例如，级数 $\sum a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\lim_{m,n\to\infty}\sum_n^m a_k=0$；积分 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow\lim_{\alpha,\beta\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=0$. 尽管 Cauchy 收敛原理是整个极限理论的基础，但用来处理具体的极限问题未必方便. 不过，毕竟有一些收敛性证明是直接依赖 Cauchy 原理的.

287 设 $a_n>0$，$S_n=\sum_1^n a_k$，$\sum a_n/S_n$ 收敛，证明 $\sum a_n$ 收敛.

证 若 $\sum a_n$ 发散，则 $\forall n>0$，$\exists m>n:S_m>2S_n$，于是 $\sum_{n+1}^m a_k/S_k\geqslant\sum_{n+1}^m a_k/S_m=(S_m-S_n)/S_m>1/2$，这与 $\sum a_n/S_n$ 收敛矛盾.

288 设 $\int_a^{\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，证明 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 由 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 知 $f(x)$ 有界. 设 $|f(x)|\leqslant M$，则

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\int_\alpha^\beta|g(x)|\mathrm{d}x\to 0(\alpha,\beta\to\infty),$$

这表明 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

单调收敛原理 有界单调序列收敛；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调且有界，则 $x\downarrow a$（或 $x\uparrow b$）时 $f(x)$ 收敛.

由单调收敛原理推出：部分和有界的正项级数收敛；若 $f(x)\geqslant 0$，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 有界，则 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

289 设 $x_n^3+2x_n+n^{-1}=0(n\geqslant 1)$，证明 $x_n\to 0$.

证 首先，$|x_n|=[n(2+x_n^2)]^{-1}\leqslant 1/2n<1$. 其次，

$$x_{n+1}-x_n=[n(n+1)(x_{n+1}^2-x_{n+1}x_n+x_n^2+2)]^{-1}>0,$$

可见 $\{x_n\}$ 单调增. 于是 $\lim\limits_n x_n=l$ 存在，且必 $l^3+2l=0$，由此解出 $l=0$.

290 证明：$f_n(x)=\sum_1^n x^k-1$ 在 $[0,1]$ 上有唯一零点 x_n，且 $x_n\to 1/2(n\to\infty)$.

证 由 $f_n(0)=-1$，$f(1)=n-1$，$f'_n(x)>0$ 知 $f_n(x)$ 有唯一零点 x_n 且 $x_n>0$. 由 $f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})$ 得

$$x_n-x_{n+1}=x_{n+1}^{n+1}/(1+x_n+x_{n+1}+\cdots)>0,$$

因此存在 $l=\lim\limits_n x_n$.

再由 $x_n(1-x_n^n)=1-x_n$. $l=1-l$，

因此 $l=1/2$.

仿上题你应当能证明类似的问题：

291 证明：方程 $\sum_1^n \cos^k x = 1$ 在 $[0,\pi/3]$ 内仅有一根 x_n，且 $x_n \pi/3(n\to\infty)$.

2.6.4 证 $\lim\limits_n x_n = 0$ 的方程

主要方法可概括如下：

(i) 指明 $\sum x_n$ 的收敛（仅用于某些特殊情况，参看题 546，547）；

(ii) 证 $\overline{\lim\limits_n}|x_n| \leqslant 0$（见 2.6.2）；

(iii) 利用以下原理：若 $x_n > 0$，则 $x_n \to 0 \Leftrightarrow \ln x_n \to -\infty \Leftrightarrow \sum \ln(x_{n+1}/x_n) = -\infty$；若 $0 < x_n \leqslant x_{n-1}$，则 $x_n \to 0 \Leftrightarrow \sum \ln(x_{n+1}/x_n)$ 发散.

下面以例题说明方法(iii).

292 设 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x$，证明 $I_n \to 0$.

证 由 $I_{n+1} = I_n(2n+2)/(2n+3)$（参考题 125）知

$$\ln\frac{I_{n+1}}{I_n} = \ln\frac{2n+2}{2n+3} = \ln\left(1-\frac{1}{2n+3}\right) \sim -\frac{1}{2n+3},$$

由此知 $\sum \ln(I_{n+1}/I_n)$ 发散，从而 $I_n \to 0$.

293 设 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x$，证明 $I_n \to 0$.

证 因 I_n 单调减，故只要证 $J_n = I_{2n} \to 0$. 由 $J_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)J_{n-1}$（参考题 121）知 $\ln(J_n/J_{n-1}) \sim -1/2n$，因此 $\sum \ln(J_n/J_{n-1})$ 发散，从而 $J_n \to 0$.

294 设 $I_n = \int_0^{\infty} (1+x^2)^{-n} \mathrm{d}x$，证明 $I_n \to 0$.

提示：导出 $I_{n+1} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)I_n$.

295 设 $x_n = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)\cdots(\sqrt{n}-1)/\sqrt{n!}$，证明 $x_n \to 0$.

提示：指明 $x_n = (1 - n^{-1/2})x_{n-1}$

2.6.5 逼近方法

这是将对连续函数的极限问题转化为相应于多项式的问题的一种方法，其原理如下：设要证 $T_n f \to 0$，T_n 线性地依赖于 $f \in C[a,b]$. 取一致收敛于 f 的一列多项式 $\{P_k\}$，则

$$T_n f = T_n P_k + T_n(f - P_k).$$

若能证 $T_n P_k \to 0(n\to\infty)$，$|T_n(f-P_k)| \leqslant \varepsilon_k$，$\varepsilon_k \to 0(k\to\infty)$，则必 $T_n f \to 0(n\to\infty)$.

296 设 $f \in C[a,b]$，$I_n = \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$，证明 $I_n \to 0$.

证 用分部积分可证，对任何多项式 $P(x)$ 有 $\int_a^b P(x)\sin nx\mathrm{d}x \to 0$. 取一致收敛于 f 的多项式 $P_k(k=1,2,\cdots)$，则

$$\left|\int_a^b [f(x) - P_k(x)]\sin nx\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x) - P_k(x)|\mathrm{d}x \to 0(k\to\infty),$$

由此得出所要证.

297 设 $f \in C[a,b]$，证明 $\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \to 0(n\to\infty)$.

298 设 $f \in C[-1,1]$，$I_a(f) = \int_{-1}^1 \frac{af(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x(a>0)$. 证明 $\lim\limits_{a\to 0} I_a(f) = \pi f(0)$.

证 $f(x)=1$ 及 $f(x) = x^{2n-1}(n\geqslant 1)$ 时结论显然成立.

$$\int_{-1}^1 \frac{ax^{2n}}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = 2a^{2n}\int_0^{1/a}\frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2a^{2n}\int_0^{1/a} t^{2n-2}\mathrm{d}t \to 0(a\to 0).$$

于是结论对 f 为多项式成立. 取多项式列 $\{P_n\}$ 一致收敛于 f,令 $\varepsilon_n = \max_{|x|\leqslant 1}|f(x)-P_n(x)|$,则

$$\overline{\lim_{a\to 0}}|I_a(f)-\pi f(0)| \leqslant \overline{\lim_{a\to 0}}|I_a(f)-I_a(P_n)|$$

$$+\overline{\lim_{a\to 0}}|I_a(P_n)-\pi P_n(0)|+\pi|P_n(0)-f(0)|$$

$$\leqslant \lim_{a\to 0}\varepsilon_n\int_{-1}^1\frac{a\mathrm{d}x}{a^2+x^2}+\pi\varepsilon_n = 2\pi\varepsilon_n.$$

令 $n\to\infty$ 得所要证.

299 设 $f\in C[0,1]$, 证明 $\lim_n\int_0^1 f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)dx$.

提示:取阶梯函数序列 $\{\varphi_k\}$,使 $\int_0^1|f(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x\to 0(k\to\infty)$.

2.7 收敛性判定

在微积分学中,各种"收敛性判别法"已十分完善. 然而在具体应用时你可能仍然感到难于选择,本节将提示若干要领.

2.7.1 级数收敛性

设要判定级数 $\sum a_n$ 的收敛性,判别法的选择取决于 a_n 的具体特性. 若 a_n 含"n 个因子连乘积"(如阶乘),则一般宜用比值法:许多因子会在比值 a_{n+1}/a_n 中约去;若 a_n 中出现 n 次方,则用根值法可能行得通.

300 设 $a_n=\prod_1^n(3k+1)/(4k-2)$,判定 $\sum a_n$ 的敛散性.

解 因 $a_n/a_{n-1}=(3n+1)/(4n-2)\to 3/4<1$，故 $\sum a_n$ 收敛.

301 设 $a_n=n^{\ln n}(\ln n)^{-n}$，判定 $\sum a_n$ 的敛散性.

解 $\sqrt[n]{a_n}=(\ln n)^{-1}\exp(n^{-1}\ln^2 n)\to 0$，故 $\sum a_n$ 收敛.

若 $a_n=f(n^{-1})$，$f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 公式的首项容易求得，则可写出 $a_n=O(n^{-p})$，当 $p>1$ 时级数 $\sum a_n$ 收敛. 具体运用此法时不必明确写出 $f(x)$.

302 设 $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{-p}\ln[(n+1)/(n-1)]$，$p>0$，判定 $\sum a_n$ 的敛散性.

解 关键在于从 a_n 中分出关于 $1/n$ 的无穷小主部，即写出 $a_n=An^{-q}+o(n^{-q})$：

$$\begin{aligned}a_n&=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{-p}[\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1-\frac{1}{n})]\\&=n^{-p/2}[2+o(1)]^{-p}\left[\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})\right]\\&=2^{1-p}n^{-1-p/2}+o(n^{-1-p/2}),\end{aligned}$$

由此得出 $\sum a_n$ 收敛.

对交错级数首先考虑用 Leibniz 判别法：若 $a_n\downarrow 0$，则 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛.

303 设 $a_n=(2n-1)!!/(2n)!!$，判定 $\sum(-1)^n a_n$ 的敛散性.

解 由 $\ln(a_n/a_{n-1})=\ln(1-1/2n)\sim-1/2n$ 推出 $a_n\downarrow 0$（参考 2.6.4），因此 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛.

若已知 $\sum a_n^\lambda$ 收敛，要判定 $\sum f(a_n)$ 的敛性，则用比较法：求出 $l=\lim\limits_{x\to 0}f(x)x^{-\lambda}$，当 $a_n^\lambda\geqslant 0$，$0\leqslant l<\infty$ 时 $\sum f(a_n)$ 收敛.

304 设 $\exp a_n=a_n+\exp b_n$，$\sum a_n^2$ 收敛，判定 $\sum b_n$ 的敛散

性.

解 解出 $b_n = \ln(\exp a_n - a_n)$，由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x - x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x(e^x - x)} = \frac{1}{2}$$

得出 $\sum b_n$ 收敛.

让你来解类似的问题：

305 设 $a_n = b_n + \ln(1 + a_n)$，$\sum a_n^2$ 收敛，判定 $\sum b_n$ 的敛散性.（收敛）.

2.7.2 积分的收敛性

广义积分可以与级数类比，两者的一些收敛判别法十分类似. 不过，因变量代换可剧烈地改变积分形式，故判定积分收敛性时可运用更灵活的方法.

306 判定 $\int_0^{\pi/2}\ln\mathrm{tg}x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 令 $\mathrm{tg}x = t$，化积分为 $\int_0^{\infty}(1+t^2)^{-1}\ln t\mathrm{d}t$. 因 $t\to 0$ 时 $(1+t^2)^{-1}|\ln t| = o(t^{-1/2})$，$t\to\infty$ 时 $(1+t^2)^{-1}\ln t = O(t^{-3/2})$，而 $\int_0^1 t^{-1/2}\mathrm{d}t$ 与 $\int_1^{\infty}t^{-3/2}\mathrm{d}t$ 收敛，故原积分收敛.

307 研究积分 $\int_0^{\infty}x^{-p}\sin x\mathrm{d}x$ 之收敛性.

解 当 $x\to 0$ 时 $x^{-p}\sin x \sim x^{1-p}$，故仅当 $p < 2$ 时 $\int_0^1 x^{-p}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 其次，用分部积分

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{\cos x}{x^p}\Big|_{\infty}^{1} - p\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$$

知当 $p > 0$ 时 $\int_1^{\infty}x^{-p}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 因此，当 $0 < p < 2$ 时原积分收敛.

类似地你可解以下两题：

308 研究$\int_0^{\infty}(x^p+x^q)^{-1}\mathrm{d}x$之收敛性.

结论:仅当$p<1<q$或$q<1<p$时收敛.

309 研究$\int_0^{\infty}x^{-p}\cos x\mathrm{d}x$之收敛性.

结论:$0<p<1$时收敛.

310 设$p>0$,研究$\int_0^{\infty}(\sin x+x^p)^{-1}\sin x\mathrm{d}x$之收敛性.

解 容易看出$\int_0^1$总收敛,故只需考虑$\int_1^{\infty}$. 因

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)},$$

而由题 307 知$\int_1^{\infty}x^{-p}\sin x\mathrm{d}x$收敛,故只要考虑$\int_1^{\infty}x^{-2p}\sin^2 x\mathrm{d}x$之收敛性. 由$2\sin^2 x=1-\cos 2x$及$\int_1^{\infty}x^{-2p}\cos 2x\mathrm{d}x$收敛,知当$p>1/2$时原积分收敛,当$0<p\leqslant 1/2$时原积分发散.

311 设$x\to\infty$时$f(x)\downarrow 0$,证明$\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛$\Leftrightarrow\int_0^{\infty}f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$收敛.

证 当$\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛时显然$\int_0^{\infty}f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$收敛. 今设$\int_0^{\infty}f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$收敛,要证$\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,为此只需证$\int_{\pi/2}^{\infty}f(x)\cos^2 x\mathrm{d}x$收敛(参考 2.2.4),这由以下不等式推出:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\infty}f(x)\cos^2 x\mathrm{d}x&=\int_{\pi/2}^{\infty}f(x)\sin^2(x-\frac{\pi}{2})\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}f(x+\frac{\pi}{2})\sin^2 x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\infty}f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x<\infty.\end{aligned}$$

2.7.3 一致收敛性

要判定$\sum u_n(x)$对$a<x<b$一致收敛,主要的方法是"M-

判别法"：求得 $b_n \geqslant |u_n(x)|$，使 $\sum b_n$ 收敛．b_n 可由直接观察得出，或若取 $b_n = \sup\limits_{a<x<b} |u_n(x)|$．

312 设 $u_n(x) = \operatorname{arctg}[2x/(x^2+n^3)]$，判定 $\sum u_n(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的一致收敛性．

解 $|u_n(x)| \leqslant 2|x|/(x^2+n^3) \leqslant n^{-3/2}$，$\sum u_n(x)$ 一致收敛．

313 判定 $\sum x/(1+n^4x^2)$ 的一致收敛性(一致收敛)．

314 设 $u_n(x) = n^2e^{-n}(x^n+x^{-n})$，判定 $\sum u_n(x)$ 在 $[1/2, 2]$ 上的一致收敛性．

解 因 $\max\limits_{1/2\leqslant x\leqslant 2}(x^n+x^{-n}) = 2^n+2^{-n} < 2^{n+1}$，故 $|u_n(x)| \leqslant 2n^2(2/e)^n$，而 $\sum n^2(2/e)^n$ 收敛，因此 $\sum u_n(x)$ 在 $[1/2,2]$ 上一致收敛．

315 判定 $\sum (n^4+x^2)^{-1/3}\sin nx$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的一致收敛性．(一致收敛)

316 设 $u_n(x) = x^2e^{-nx}$，判定 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上的一致收敛性．

解 因 $u_n(0) = u_n(\infty) = 0$，$u'_n(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内有唯一零点 $2/n$，故 $\max\limits_{x\geqslant 0} u_n(x) = u_n(2/n) = 4(en)^{-2}$，因此 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致收敛．

第三章　简化原则

从本章开始，我们要依次阐述构成本书核心的四大原则．解题艺术的精髓，正寓于这些原则之中．在四大原则中居于首位的无疑是“简化原则”．对于数学问题的解法，你“欲改进它，就应简化它”——这一简单句子实际上已包含了简化原则的主导想法．简化你的解法，再没有比这更自然更合理的了，以至不可能听到反对的意见．然而，提出“简化”还只是表达了一种合理的愿望，愿望的实现并非易事．提供尽可能多的简化的方法与途径，正是本章的任务．

你可能立即发现一个“悖论”：为了“简化”，就得学习“简化”的方法；而为掌握这些方法所付之代价竟成了一个“复杂”问题．这合算吗？事情并没这么糟糕．其实你并不需要为了简化而去啃某些捉摸不透的秘诀．本章所有的方法都基于自然合理的思考，每个人凭常识与直觉就能顺利理解与掌握，只是因为平常未能细察而忽略罢了．你自然要付出一定代价，但你会因此而长久受益．

3.1　简化模型

为解某个几何、力学或物理等领域的应用题，首先必须从问题构造出适当的数学模型，因而将问题归结为某个分析、代数或其它数学问题，然后才谈得上应用适当数学工具求解．一个充分

简化的模型，将成为你解决问题的良好起点. 当你着手构造模型时，可考虑以下建议：

(i)首先应当毫不含糊地确定，问题的目标是什么？它可归属于哪种类型？

(ii)如果问题涉及空间关系，应以最有利的方式选择与放置坐标系，通常应以某个对称中心作为坐标原点，以对称轴作为坐标轴.

(iii)适当选择变元，通常宁可变元少一些. 但若增加变元能获得某种对称性，则多一些变元亦是可取的，此时不必强调变元彼此独立.

(iv)确定问题中各个量的关系及其表达方式，应合理选择表达式以使模型简化.

最好是通过一些例子来说明.

317 飞机在观察者上空高h处水平匀速飞过. 当观察者以多大仰角了望飞机时，感到它的速度仅及飞经头顶时的一半(不考虑地面弯曲)？

解 这是一个速率问题，属微分学领域，问题仅涉及3个变量：时间t，仰角φ及飞机飞过的水平距离x(从头顶算起). x与φ不互相独立：$x = h\operatorname{tg}\varphi$. 依题意，问题是要求出使$\varphi' = \frac{1}{2}\varphi'(0)$的$\varphi$，由$2\varphi' = \varphi'(0) = h^{-1}x'(0) = h^{-1}x'(t) = \varphi'/\cos^2\varphi$解出$\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$，故得$\varphi = \pi/4$.

318 一旋转体容器中的液体从底部小孔流出，流速与液面高度之正平方根成正比. 若液面匀速下降，求旋转体之形状.

解 设容器侧面由曲线$x = f(z)(0 \leqslant z \leqslant b)$绕$z$轴旋转而成，$z$轴在铅直方向，容器底部在$xy$平面上，液面高度为$z(t)$，问题是求$f(z)$. 由$-\pi f^2(z)\mathrm{d}z = k\sqrt{z}\,\mathrm{d}t$，与$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -v =$

const 得 $f(z) = (k/\pi v)^{1/2} z^{1/4}$.

319 设宽分别为 a、b 的两河垂直相交，求能驶过相交处的船的最大长度.

解 这是一个最大值问题. 将船抽象为长 l 的线段. 经过拐角处的极端情形是：船的两端及中间一点皆触及河岸，此时 $l = a(\cos x)^{-1} + b(\sin x)^{-1}$，$x$ 是船与一河岸的交角，于是问题为解"$\min l, 0 < x < \pi/2$"，用微分法解出 $x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{b/a}$，$l = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

选角度作为变元通常是有利的.

320 长 l 的光滑细棒放入水平放置的半径为 a 的半球形碗内，$l > 2a$，求其平衡位置.

解 当不计摩擦力时，棒在平衡位置重心最低，因此本题是一极值问题. 将棒看作线段，设它与水平面之交角为 $x(0 < x < \pi/2)$，棒中点进入碗中深度为 h，则 $h = a\sin 2x - \frac{l}{2}\sin x$，而问题为解"$\max h, 0 < x < \pi/2$". 用微分法解出在平衡位置 $\cos x = (l + \sqrt{l^2 + 128a^2})/16a$，由 $\cos x \leqslant 1$ 推出 $l \leqslant 4a$，这意味着 $l > 4a$ 时无平衡位置.

321 试设计一个反光镜，使点光源经反射后变为平行光束.

解 因旋转面之法线过中心轴(参考题 185)，可用旋转凹曲面，光源置于中心轴上. 于是问题归于求 xy 平面上的曲线 $y = y(x)$，使定点 $(a, 0)$ 与曲线上的动点 M 的联线与过 M 的水平线夹角 2α，而过 M 的法线平分此角. 由几何关系知 $y' = \operatorname{ctg}\alpha$，$\operatorname{tg} 2\alpha = y/(a - x) = 2p/(p^2 - 1)$，$p = y'$，解此微分方程得 $y^2 = 4ax$(假定 $y(0) = 0$).

3.2 简化问题

设想你面对一个数学问题(P),你可能会不加思索地立即着手求解.本节则要坚决劝告你:且慢!你首先应思考一下,能否以某个更简单的问题(Q)替换(P)?这种"简化问题"的考虑遍及各个领域,下面主要以极值问题为例加以说明.

3.2.1 极值问题

一个最小值问题可标准地写成:

$$(P) \qquad \min f, \qquad \varphi = 0,$$

其中 f 是"目标函数",φ 是"约束函数".求解问题(P),就是求出这样的点,f 在该点取得相对于条件 $\varphi = 0$ 的最小值.简化问题(P)的主要途径是简化目标函数(有时亦须简化约束函数),方法是选取严格单调函数 F,以 $F(f)$ 替换 f;或者进行自变量代换.

322 求曲线 $y = x^2$ 与 $x + y + 2 = 0$ 之间的最短距离.

解 由解析几何知,点(x,y)到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离 $d = |x + y + 2| / \sqrt{2}$,于是要解的问题为:

$$\min |x + y + 2| / \sqrt{2}, y - x^2 = 0. \qquad (3.2.1)$$

易见(3.2.1)的解(x,y)必使 $x + y + 2 > 0$,故(3.2.1)可换成:

$$\min(x + y), x^2 - y = 0 \qquad (3.2.2)$$

令 $L = x + y + \lambda(x^2 - y)$,联立 $L_x = 0, L_y = 0, y = x^2$ 解出 $x = -1/2, y = 1/4$,于是 $d = 7/4\sqrt{2}$ 为所求最短距离.

以(3.2.2)替换(3.2.1)的好处在于避开了不可微函数 $|x + y + 2| / \sqrt{2}$.仿此,你能解以下问题:

323 求曲面 $4z=3x^2-2xy+3y^2$ 与 $x+y-4z=1$ 之间的最短距离 $d(d=\sqrt{2}/8)$.

324 在椭圆 $a^{-2}x^2+b^{-2}y^2=1$ 上求一点，使过该点的法线与原点相距最远.

解 椭圆过点 (x,y) 的法线为

$$a^2yX-b^2xY-xy(a^2-b^2)=0;$$

原点到法线之距离 $d=|xy(a^2-b^2)/\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}|$，于是要解

$$\max d, a^{-2}x^2+b^{-2}y^2=1. \qquad (3.2.3)$$

为简化(3.2.3)，令 $u=x^2/a^2, v=y^2/b^2$，则 $(a^2-b^2)^2/d^2=a^2u^{-1}+b^2v^{-1}$，于是(3.2.3)可代之以简单得多的问题：

$$\min(a^2u^{-1}+b^2v^{-1}), u+v=1. \qquad (3.2.4)$$

由(3.2.4)解得 $u=a/(a+b), v=b/(a+b)$，于是所求的点为 $(\pm\sqrt{a^3/(a+b)}, \pm\sqrt{b^3/(a+b)})$.

325 求球的最小体积外切正圆锥.

解 不妨设球半径 $=1$，其外切正圆锥底半径为 r，高为 h. 由几何关系知 $1:r=h-1:\sqrt{r^2+h^2}$，圆锥体积 $V=\pi r^2h/3$，于是问题归于解

$$\min V, r^{-1}=(h-1)/\sqrt{r^2+h^2}. \qquad (3.2.5)$$

(3.2.5)中的约束条件可改写成 $r^{-2}+2h^{-1}=1$，而 $V^{-1}=(3/2\pi).r^{-2}\cdot(2h^{-1})$. 令 $u=r^{-2}, v=2h^{-1}$，(3.2.5)简化为

$$\max uv, u+v=1. \qquad (3.2.6)$$

依据“和固定时彼此相等的正数乘积最大”这一原理(见题376)，(3.2.6)的解为 $u=v=1/2$，因而 $h=2r^2=4$ 给出原问题的解.

有趣的是，问题简化的结果可使答案自动显现而无需计算，许多几何嵌入问题有此特点.

326 在$a^{-2}x^2+b^{-2}y^2+c^2z^2=1$内嵌入最大体积长方体.

解 设嵌入长方体在第一封限内之顶点为(x,y,z),则其体积$V=8xyz$,问题归于求解

$$\max 8xyz, a^{-2}x^2+b^{-2}y^2+c^{-2}z^2=1$$

因$V=8abc\sqrt{(a^{-2}x^2)(b^{-2}y^2)(c^{-2}z^2)}$,用上题的解法得出$(x,y,z)=(a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$.

327 在半球$x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0$内嵌入最大体积长方体(在第一封限内的顶点为$(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$).

328 求周长一定面积最大的三角形.

解 设三角形三边长为$a,b,c,a+b+c=25$,则面积$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,应求解问题为

$$\max S,\quad a+b+c=2s. \tag{3.2.7}$$

若令$x=s-a,y=s-b,z=s-c$,则$S^2=sxyz,x+y+z=s$,于是(3.2.7)简化为"$\max xyz,x+y+z=s$",这解出$x=y=z$,即$a=b=c$,因此所求为正三角形.

3.2.2 函数性质问题

设要判定函数$f(x)$是否具性质P,若φ与有性质P的函数复合时保存性质P,则可用$\varphi(f(x))$替换$f(x)$,而前者可能简单得多.涉及单调性与极值时取φ为严格增函数;涉及凸性时取φ为凸增函数.

329 判定$f(x)=(\operatorname{arctg}x^2/(1-x^2))^{-1/2}(0<x<1)$的单调性.

解 令$\varphi(x)=1/\operatorname{tg}x^{-2}(\sqrt{2/\pi}<x<\infty)$,则$\varphi$严格单调增,$g(x)=\varphi(f(x))=x^{-2}-1$严格单调减,故$f(x)$严格单调减.

330 判定$f(x)=\sqrt{\ln^3x+3\ln^2x+6\ln x+6}/\sqrt{x}(x>1)$的单调性.

提示：考虑函数 $g(x) = e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$. 结论：$f(x)$ 严格单调减.

331 研究 $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$ 的极值.

解 $f(x)$ 与 $g(x) = f^3(x) = x^3(x-1)$ 有相同的极值点. 因 $g'(3/4) = 0 < g''(3/4)$，$3/4$ 是 $f(x)$ 的极小点.

332 研究 $f(x) = 10/\ln(2 + \sin^2 x)$ 的极值.

提示：归于考虑 $\sin^2 x$，结论：$f(x)$ 以 $n\pi$ 为极大点，以 $n\pi + 2^{-1}\pi$ 为极小点，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

333 判定 $f(x) = \ln\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}\,(0 < x < \pi)$ 之凸性.

解 已知 $\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内为凹函数，故 $f(x)$ 为凸函数决定于 $\varphi(x) = \ln[(1+x)/(1-x)]\,(0 < x < 1)$ 为凸增函数，这由 $\varphi'(x) = 2/(1-x^2) > 0$ 与 $\varphi''(x) = 2x/(1-x^2)^2 > 0$ 得出.

334 判定 $f(x) = \arcsin[x/(1+x^2)]\,(x > \sqrt{3})$ 之凸性.

提示：$\arcsin x$ 是凸增函数，$x/(1+x^2)\,(x > \sqrt{3})$ 是凸函数.

335 研究 $f(x) = \sin^3 x\cos x - 1/4$ 在 $[0,\pi]$ 上的零点.

解 令 $t = \sin^2 x$，$\varphi(t) = t^3(1-t)$，则 $f(x) = \sqrt{\varphi(t)} - 1/4$，$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(t) = 1/16$，用微分法易确定，$\varphi(t)$ 在 $[0, 3/4]$ 上严格增加，在 $[3/4, 1]$ 上严格减少，$\varphi(3/4) = 27/256 > 1/16$，而 $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$，于是 $\varphi(t) = 1/16$ 有两个根，从而 $f(x)$ 有两个零点.

336 研究 $f(x) = \ln[(1 + \sin x + \cos^2 x)/(1 + \sin^2 x)]$ 的零点.

提示：考虑 $g(t) = (2t - t^2)/(1 + t^2)$. 结论：$f(x)$ 有零点：$2n\pi + \pi/2$，$2n\pi + 3\pi/2 \pm \pi/3$，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

3.2.3　其它问题

337　设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 的任何有限子区间上有界，$\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n}[f(x+1)-f(x)]=l$. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n-1}f(x)=l/(n+1)$.

证　可设 $l=0$（否则以 $f(x)-lx^{n+1}/(n+1)$ 代 $f(x)$），于是将原问题化为较简单的问题：证

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=0.$$

令 $g(b)=\sup\limits_{x\geqslant b}x^{-n}|f(x+1)-f(x)|\,(b>0)$，则 $g(b)\to 0\,(b\to\infty)$. 固定 $b>0$，$\forall\ x>b$，存在整数 n_x：$b\leqslant x-n_x<b+1$，于是

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{|f(x)|}{x^{n-1}}&\leqslant\overline{\lim_{x\to\infty}}\Big[\frac{|f(x-n_x)|}{x^{n+1}}\\&\qquad+\frac{1}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n_x-1}|f(x-k)-f(x-k-1)|\Big]\\&\leqslant\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{n_x}{x}g(b)=g(b),\end{aligned}$$

由此得出所要证（参照题 276）.

338　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内两次可微，$c\in(a,b)$，$f''(c)\neq 0$，证明：存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，使 $f'(c)=[f(x_1)-f(x_2)]/(x_1-x_2)$.

证　不妨设 $f'(c)=0$，$f''(c)>0$，否则以 $f(x)-f'(c)x$ 或 $f'(c)x-f(x)$ 换 $f(x)$. 于是问题简化成证：

$$f'(c)=0<f''(c)\Rightarrow\exists\ x_1,x_2\in(a,b):f(x_1)=f(x_2).$$

因在 $x=c$ 邻近 $f'(x)$ 严格增加，故在 $x=c$ 左右两侧分别有 $f'(x)<0$ 与 $f'(x)>0$，而这意味 $x\to c$ 时有 $f(x)>f(c)$，由此容易看出所需的 x_1,x_2 存在.

339　设 $a,b>0$，$f\in C^1[0,\infty)$，$f(0)=0$，$f'(x)>0\,(x>$

0)，$g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，$g(b)$ 有意义，证明

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\mathrm{d}y \geqslant ab. \tag{3.2.8}$$

证　不妨设 $c = f(a) \leqslant b$(对 $g(b) \leqslant a$ 的情况可类似证明)，因 $f'(x) > 0$ 推出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆为增函数，故

$$\int_0^b g(y)\mathrm{d}y \geqslant \int_0^c g(y)\mathrm{d}y + (b-c)g(c)$$

$$= \int_0^c g(y)\mathrm{d}y + ab - ac.$$

与(3.2.8)对照看出只需证等式：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} g(y)\mathrm{d}y = af(a).$$

以 x 代 a，这就将证不等式(3.2.8)简化为证等式

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(y)\mathrm{d}y = xf(x),$$

后者只需用一次求导即获证明(参看 8.2.3).

340　设 $x_{n+1} = \varphi(x_n)(n \geqslant 0)$，$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证　因 $\{x_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 级数 $\sum(x_{n+1} - x_n)$ 收敛(参看 5.2)，故可将问题转化为证 $\Sigma|x_{n+1} - x_n|$ 收敛. 由

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} = \frac{|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})|}{|x_n - x_{n-1}|} \leqslant q$$

及比值法，知所要结论成立.

3.3　简化记号

你可能不太喜欢数学符号，许多符号在你眼中的陌生面孔大概使你惶惑. 不过，你终究会承认，今日数学之辉煌成就在一

定程度上得归功于它的特别有效的符号体系. 那些实践证明优点突出且已通用的记号，无论如何值得大力提倡；它们所带来的简化效果如何显著，正是本节所要极力说明的.

3.3.1 求和号与求积号

记号$\sum a_k$与$\prod a_k$不只是一种缩写，而且是对通项a_k的一种明确表达. 试比较$S = 1 - 4^{-1} + 7^{-1} - \cdots$与$S = \sum_0^\infty (-1)^n/(3n+1)$这两种写法，前者远不如后者那样明确展示了通项的规律. 记号$\sum a_k$的另一个优点是一些运算形式上简化了. 例如，求$(u_1 + \cdots + u_n)'$时要逐项微分n次，而用记号$\sum_1^n u_k'$则仿佛只须微分一次. 对加法$\sum a_k + \sum b_k$有类似效果.

341 设$T_{n,m} = \sum_1^n (2i-1)^m$，$S_{n,m} = \sum_1^n i^m$，证明$T_{n,m} = \sum_0^m (-1)^{m-k}\binom{m}{k} 2^k S_{n,k}$（参考题 133）.

证

$$T_{n,m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}(2i)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}2^k\sum_{i=1}^{n}i^k$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}2^k S_{n,k}.$$

利用上题及 1.6.1 中的结果得出：

$$T_{n,1} = -S_{n,0} + 2S_{n,1} = n^2;$$
$$T_{n,2} = S_{n,0} - 4S_{n,1} + 4S_{n,2} = n(4n^2-1)/3;$$
$$T_{n,3} = -S_{n,0} + 6S_{n,1} - 12S_{n,2} + 8S_{n,3} = 2n^4 - n^2.$$

342 求$S = 1^3 + 4^3 + \cdots + (3n-2)^3 (= (27n^4 - 18n^3 - 9n^2 + 4n)/4)$.

343 求$l = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{1-n}(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-$

$\sqrt[n]{x}$).

解 令 $1-x=t$,则

$$\ln l=\sum_2^n \ln\lim_{t\to 0} t^{-1}(1-\sqrt[k]{1-t})=-\sum_2^n \ln k=-\ln n!,$$

由此得 $l=1/n!$.

344 设 $f(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$,求 $f'(x)$.

解 利用公式 $f'(x)=f(x)[\ln f(x)]'$:

$$f'(x)=f(x)\left[\sum_1^n \ln(1+x^k)\right]'=f(x)\sum_1^n \frac{kx^{k-1}}{1+x^k}.$$

345 设 $f(x)=(2+\sin x)(2+\sin 2x)^2\cdots(2+\sin nx)^n$,求 $f'(x)(=f(x)\sum_1^n k^2\cos kx(2+\sin kx)^{-1})$.

346 设 $u=f\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)$,$f$ 两次可微,求 $\Delta u=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}$.

解 令 $r=(\sum x_i^2)^{1/2}$,则 $\partial r/\partial x_i=x_i/r$,$u=f(r)$,$u_{x_i}=r^{-1}x_if'(r)$,$u_{x_ix_i}=f''(r)r^{-2}x_i^2-f'(r)r^{-3}x_i^2+f'(r)r^{-1}$,于是

$$\begin{aligned}\Delta u&=f''(r)r^{-2}\sum x_i^2-f'(r)r^{-3}\sum x_i^2+nf'(r)r^{-1}\\&=f'(r)+(n-1)r^{-1}f'(r).\end{aligned}$$

3.3.2 o 记号与 O 记号

设 u,v 为 x 的函数,若 $x\to a$ 时 $u/v\to 0$,则记作 $u=o(v)(x\to a)$;若 $x\to a$ 时,u/v 有界,则记作 $u=O(v)$. 容易验证 $o(u)+o(u)=o(u)$,$o(u)o(v)=o(uv)$;$u\to A(x\to a)\Longleftrightarrow u=A+o(1)$,后一记号表明,可用 o 记号代替极限记号,而这就可能简化极限算式.

347 求 $l=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x]$.

解 令 $x=1/t$,则当 $x\to\infty$(即 $t\to 0$) 时

$$\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}=t^{-1}\sqrt[n]{(1+a_1t)\cdots(1+a_nt_0)}$$

$$= t^{-1}\left[1 + t\sum a_i + o(t)\right]^{1/n}$$
$$= t^{-1} + n^{-1}\sum a_i + o(1),$$

由此得出 $l = n^{-1}\sum a_i$.

348 求 $l = \lim\limits_{x\to\infty} x^{2-n}\left[(x + \sqrt{x^2+1})^n - (x + \sqrt{x^2-1})^n\right]$.

解 令 $x = 1/t$,则当 $x\to\infty$ 时

$$x^{2-n}\left[(x + \sqrt{x^2+1})^n - (x + \sqrt{x^2-1})^n\right]$$
$$= t^{-2}\left[(1 + \sqrt{1+t^2})^n - (1 + \sqrt{(1-t^2)})^n\right]$$
$$= t^{-2}\left\{\left[2 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right]^n - \left[2 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right]^n\right\}$$
$$= t^{-2}\left\{\left[2^n + 2^{n-2}t^2 + o(t^2)\right] - \left[2^n - 2^{n-2}t^2 + o(t^2)\right]\right\}$$
$$= 2^{n-1} + o(1),$$

由此得出 $l = 2^{n-1}$.

利用 Taylor 公式的唯一性,一旦得出

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)\ (x\to 0),$$

你就能断定 $f^{(i)}(0) = i!a_i(0\leqslant i\leqslant n)$,以下两题是应用这一原理的例子.

349 设 $f\in C^3$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[1 + x + x^{-1}f(x)\right]^{1/x} = e^3$, 求 $f^{(i)}(0)(0\leqslant i\leqslant 2)$.

解 由 $\left[1 + x + x^{-1}f(x)\right]^{1/x} = e^3 + o(1)(x\to 0)$ 有

$$f(x) + x + x^2 = x\left[e^3 + o(1)\right]^x$$
$$= x\exp\left[x\ln(e^3 + o(1))\right]$$
$$= xe^{3x+o(x)} = x + 3x^2 + o(x^2),$$

因此 $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$,由此得 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 4$.

仿此可解类似的问题:

350 设 $f \in C^3, \lim\limits_{x \to 0}[f(x) - 2x]^{1/x^2} = e^2$,求 $f^{(i)}(0)(0 \leqslant i \leqslant 2)$.

答案:$f(0) = 1, f'(0) = 2, f''(0) = 4$.

若 $a_n = An^{-p} + o(n^{-p}), A \neq 0$,则 $\sum a_n$ 当 $p > 1$ 时收敛,当 $p \leqslant 1$ 时发散(参考 2.7.1).

351 设 $a_n = [e - (1 + n^{-1})^n]^p$,研究 $\sum a_n$ 之收敛性.

解 首先估计 $x_n = (1 + n^{-1})^n$:

$$x_n = \exp\left[n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= e \cdot \exp\left[-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是
$$a_n = (e - x_n)^p = \left(\frac{e}{2n}\right)^p + o\left(\frac{1}{n^p}\right),$$
因此,级数在 $p > 1$ 时收敛,$p \leqslant 1$ 时发散.

3.3.3 向量记号

一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 表示一组数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,这一事实已表明记号 $\boldsymbol{x}$ 的高度浓缩性,若加上向量运算的记号,如 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum x_i y_i$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$,则所带来的简化更加显著. 在微积分学的几何、物理应用中,向量记号尤为方便. 以下约定 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$ 记 $\boldsymbol{r}$ 的长度.

352 求半径为 1 且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 正交的球面的中心之轨迹.

解 任取一个这样的球面,其中心在 A,它与单位球面交于点 B. 令 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$,则

$$\boldsymbol{a}^2 = ((\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 + 2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$$
$$= 1 + 0 + 1 = 2,$$

这表明所求轨迹是以原点为心 $\sqrt{2}$ 为半径球面.

353 设 B 是光滑曲线 $F(x, y, z) = 0$ 上一点,使 AB 是点

A 至曲面之最短距离. 证明 AB 为曲面之法线.

证 令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,则 $B=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是问题(参照 3.2.1)

$$\min((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})^2, F(\boldsymbol{r})=F(x,y,z)=0$$

的解,从而有常数 λ,使 $L=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})^2+\lambda F$ 满足

$$0=\mathrm{d}L(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(2\overrightarrow{BA}+\lambda\nabla F)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

这推出 $\overrightarrow{AB}=\lambda(\nabla F)/2$,因此 AB 是曲面之法线.

注 公式 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2=2\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 可与 $\mathrm{d}x^2=2x\mathrm{d}x$ 类比. 其次注意 $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=r\mathrm{d}r$.

若令 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$,则

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

在某些情况下,采用右端的向量形式更便于计算.

354 设平面力 $\boldsymbol{F}$ 指向原点,$|\boldsymbol{F}|$ 与 r 成正比. 质点在 $\boldsymbol{F}$ 作用下依反对针方向通过四分之一椭圆 $L: a^{-2}x^2+b^{-2}y^2=1(x,y\geqslant 0)$,求 $\boldsymbol{F}$ 作的功 Q.

解 依题意 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$,$k$ 为正常数,于是

$$Q=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-k\int_L \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\frac{k}{2}\int_L \mathrm{d}r^2$$

$$=\frac{kr^2}{2}\Big|_{(0,b)}^{(a,0)}=\frac{k}{2}(a^2-b^2).$$

355 设力 $\boldsymbol{F}$ 指向原点,$|\boldsymbol{F}|$ 与作用点到 xy 平面的距离成反比,质点在 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线 L 从点 $(a,b,c)(c\neq 0)$ 移至 $(2a,2b,2c)$,求 $\boldsymbol{F}$ 作的功 Q.

解 依题意有 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}/r|z|$,$k$ 为正常数,$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{A}(1\leqslant t\leqslant 2)$,$\boldsymbol{A}=\{a,b,c\}$,于是

$$Q=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-k\int_L \frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{r|z|}=-k\int_L \frac{\mathrm{d}r}{|z|}$$

$$=-k\int_1^2 \frac{|\boldsymbol{A}|\mathrm{d}t}{|c|t}=-\frac{k\ln 2}{|c|}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

3.3.4　微分算子记号 ∇

设 u,P,Q,R 是(x,y,z)的可微函数，$\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$.

$$\nabla u=\{u_x,u_y,u_z\},\triangle\cdot\boldsymbol{F}=P_x+Q_y+R_z,$$

$$\triangle\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\{R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y\}$$

分别表示梯度、散度与旋度.这组记号的奇妙之处在于，一方面，∇ 具有微分运算的性质，例如Leibniz规则；另一方面，它具有向量运算的特征.适当地运用记号 ∇，可使某些微积分计算大大简化.不难记住关于 ∇ 的以下公式：

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u,\nabla f(u)=f'(u)\nabla u;\tag{3.3.1}$$

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{F})=\nabla u\cdot\boldsymbol{F}+u\nabla\cdot\boldsymbol{F},$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{F})=\nabla u\times\boldsymbol{F}+u\nabla\times\boldsymbol{F};\tag{3.3.2}$$

$$\nabla\times\nabla u=\boldsymbol{0},\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0,\nabla\cdot\nabla u=\Delta u;\tag{3.3.3}$$

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r},\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3,\nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0},\tag{3.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\},r=|\boldsymbol{r}|,\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

356　设 $u=r^{-1}\operatorname{ch}r$，证明 $\Delta u=u$.

证　利用公式(3.3.1) ~ (3.3.3)：

$$\nabla u=(r^{-1}\operatorname{ch}r)'\nabla r=r^{-3}(r\operatorname{sh}r-\operatorname{ch}r)\boldsymbol{r};$$

$$\begin{aligned}\triangle u&=\nabla(r^{-3}(r\operatorname{sh}r-\operatorname{ch}r)\cdot\boldsymbol{r}+3r^{-3}(r\operatorname{sh}r-chr)\\&=r^{-3}(r^2\operatorname{ch}r-3r\operatorname{sh}r+3\operatorname{ch}r)+3r^{-3}(r\operatorname{sh}r-\operatorname{ch}r)\\&=r^{-1}\operatorname{ch}r=u.\end{aligned}$$

作为对比，你不妨直接求出 u_{xx},u_{yy},u_{zz} 以解上题.如果你对于记号 ∇ 的好处体会还不够充分，最好自己解决以下两题.

357　设 $u=\ln r$，证明 $\Delta u=1/r$.

358 设 $u = 1/r$，证明 $\triangle u = 0$.

359 设 $w = u + r^2 v$，u，v 满足 $\triangle u = \triangle v = 0$. 证明 $\triangle^2 w = \triangle(\triangle w) = 0$.

证 显然只需证 $\triangle^2(r^2 v) = 0$.

$$\begin{aligned}\triangle(r^2 v) &= \nabla \cdot \nabla(r^2 v) = \nabla \cdot (2v\boldsymbol{r} + r^2 \nabla v) \\ &= 2\nabla v \cdot \boldsymbol{r} + 6v + 2\boldsymbol{r} \cdot \nabla v + r^2 \triangle v \\ &= 4\boldsymbol{r} \cdot \nabla v + 6v,\end{aligned}$$

于是只要证 $\triangle(\boldsymbol{r} \cdot \nabla v) = 0$，这可由直接计算证实.

3.4 中途简化

解题之初所作的简化往往影响全局，自然十分重要. 解题过程中还可能出现一些局部性简化的机会，亦不应忽视. 能随时甩掉一些包袱，你会更加轻松快捷.

3.4.1 极限计算中的简化

基本的要领如下：

(i) 凡能算出极限的项或因子分离计算之；

(ii) 凡可用更为简单的等价无穷小替换的因子皆替换之；

(iii) 凡可用变量代换化简者皆代换之.

360 求 $l = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x^2 e^x)^{1/(1-\cos x)}$.

解

$$\ln l = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2 e^x)}{1 - \cos x}$$

(无穷小替换)
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

(L'Hospital 法)
$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2,$$

因此 $l = e^2$.

361 求$\lim\limits_{x\to0}(x^{\sin x}-1)/x\ln x(=1)$.

362 求$l=\lim\limits_{x\to0}x^2/(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x})$

解
$$l=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1-x\sin x-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}$$
(L'Hospital 法)
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2\sin x+x\cos x}=\frac{4}{3}.$$

363 求$l=\lim\limits_{x\to0}x^{-2}(1-\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x})$.

解 插入$x^{-2}(-\cos x+\cos x-\cdots)$后得分解：
$$l=\lim_{x\to0}x^{-2}[(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos2x})$$
$$+\cos x\sqrt{\cos2x}(1-\sqrt[3]{\cos3x})]=\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\cos x)$$
$$+\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\sqrt{\cos2x})+\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\sqrt[3]{\cos3x})$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\cos2x)+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\cos3x)$$
$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

364 求$l=\lim\limits_{x\to\pi/2}(1-\sin^{\alpha+\beta}x)/\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}$ $(\alpha,\beta>0)$.

解 令$t=\sin x$，且去根号计算：
$$l^2=\lim_{t\to1}\frac{(1-t^{\alpha+\beta})^2}{(1-t^\alpha)(1-t^\beta)}$$
(L'Hospital 法)
$$=\lim_{t\to1}\frac{2(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}(t^{\alpha+\beta}-1)}{(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}-\alpha t^{\alpha-1}-\beta t^{\beta-1}}$$
(约去公因子)
$$=\lim_{t\to1}\frac{2(\alpha+\beta)(t^{2\alpha-\beta}-t^\alpha)}{(\alpha+\beta)t^\alpha-\alpha t^{\alpha-\beta}-\beta}$$
(L'hospital 法)
$$=\lim_{t\to1}\frac{2(\alpha+\beta)[(2\alpha+\beta)t^{2\alpha+\beta-1}-\alpha t^{\alpha-1}]}{\alpha(\alpha+\beta)t^{\alpha-1}-\alpha(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta-1}}$$

$$= \frac{2(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta-\alpha)}{\alpha(\alpha+\beta)-\alpha(\alpha-\beta)} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta},$$

于是 $l = (\alpha+\beta)/\sqrt{\alpha\beta}$.

365 求 $l = \lim\limits_{x\to 0} x^{-4}[\cos(\sin x) - \cos x]$.

解 令 $t = \sin x$，且以 t^{-4} 代 x^{-4}：

$$l = \lim_{t\to 0} t^{-4}(\cos t - \sqrt{1-t^2})$$

$$\text{(L'Hospital 法)} \quad = \lim_{t\to 0} \frac{t - \sqrt{1-t^2}\sin t}{4t^3\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t - \sqrt{1-t^2}\sin t}{4t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t - \sin t}{4t^3} + \lim_{t\to 0} \frac{\sin t(1-\sqrt{1-t^2})}{4t^3}$$

$$= \frac{1}{24} - \lim_{t\to 0} \frac{2^{-1}t^2}{4t^2} = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6}.$$

3.4.2 微分计算中的简化

微分计算大概很少使你感到为难，因通常（如对初等函数）这总是畅通无阻的. 然而仍有一些要领，倘能充分体会，可将计算过程安排得更为合理. 首先，超越函数 $\ln x$，$\mathrm{arctg}\,x$ 等的出现必使算式变得复杂，应尽可能通过一次求导使其有理化. 其次，如求 y''，首先应将 y' 的表达式化至最简形状.

366 设 $2y - x = (x-y)\ln(x-y)$，求 y''.

解 对等式 $(2y-x)/(x-y) = \ln(x-y)$ 求导得

$$(2y'-1)(x-y) - (2y-x)(1-y')$$
$$= (x-y)(1-y'),$$

由此解出 $y' = x(2x-y)$，进而有 $y'' = \dfrac{xy'-y}{(2x-y)^2} = \dfrac{(x-y)^2}{(2x-y)^3}$

以上算法的特点是第一次求导就消去了 $\ln(x-y)$. 当然亦可直接对原方程求导得出：$y' = [2+\ln(x-y)]/[3+\ln(x-y)]$

只是还得以 $\ln(x-y)=(2y-x)/(x-y)$ 代入.

367　设 $\sqrt{x^2+y^2}=\exp[\mathrm{arctg}(y/x)]$，求 y''.

解　首先应化简原方程：$2^{-1}\ln(x^2-y^2)=\mathrm{arctg}(y/x)$. 对此方程两边求导能一次有理化：$x+yy'=xy'-y$. 解出 $y'=(x+y)/(x-y)$；进而易得 $y''=2(x^2+y^2)/(x-y)^3$.

现在你自己来体验一下.

368　设 $y=2x\mathrm{arctg}(y/x)$，求 $y''(=0)$.

369　设 $y=x\mathrm{tg}y$，求 y''.

提示：注意 $y=\mathrm{arctg}(y/x)$. $y''=2y(1-x)(x^2+y^2)(x-x^2-y^2)^{-3}$.

多元隐函数的微分计算有类似特点.

370　设 $x-z=(y-z)\ln(y-z)$，求 d^2z.

解　类似于题366，微分等式 $(x-z)/(y-z)=\ln(y-z)$ 后解出不含 $\ln(y-z)$ 的

$$\mathrm{d}z=(x-z)^{-1}[(z-y)\mathrm{d}x+(x+y-2z)\mathrm{d}y]$$

微分上式并代入 $\mathrm{d}z$ 后得 $\mathrm{d}^2z=(x-z)^{-3}(y-z)^2(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2$.

371　设 $z=x+\mathrm{arctg}[y/(z-x)]$，求 d^2z.

解　令 $u=z-x$，则 $\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}^2z$，$u=\mathrm{arctg}(y/u)$. 首先求出 $\mathrm{d}u=(u/v)\mathrm{d}y$，$v=u^2+y^2+y$，进而算得：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=\mathrm{d}(u/v)\mathrm{d}y=v^{-2}(v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v)\mathrm{d}y\\&=v^{-2}[u\mathrm{d}y-u(2u\mathrm{d}u+2y\mathrm{d}y+\mathrm{d}y)]\mathrm{d}y\\&=uv^{-3}[v-2u^2-2vy-v)\mathrm{d}y^2\\&=-2uv^{-3}(y+1)(u^2+y^2)\mathrm{d}y^2\\&=2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]([x-z)^2+y^2+y]^{-3}\end{aligned}$$

372　设 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\exp[\mathrm{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}/z)]$，求 $\mathrm{d}z$.

提示：参照题 367. $\mathrm{d}z=\dfrac{(z-r)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{r(z+r)}$，$r=$

$\sqrt{x^2+y^2}$.

3.4.3 积分计算中的简化

积分计算无疑比微分计算困难，但简化的途径更多：分离出易计算的项；应用分部积分与变量代换；利用被积函数的奇偶性与周期性，等等，这些方法反复出现于本书各章节，此处仅举几个简单例子.

373 求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3-\cos x)}$.

解 考虑到被积函数有明显分解式，首先求

$$I_a=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a-\cos x}=2\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\cos x}$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{a+\cos x}+\frac{1}{a-\cos x}\right)dx=2a\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2-\cos^2 x}$$

$$=4a\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2-\cos^2 x}=4a\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2-1+a^2t^2}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

于是 $I=I_2-I_3=2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$，注意以上演算中反复利用被积函数的某种对称性质来改变积分(参考 4.2).

374 求 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\sin x)(3+\sin x)}$(同上题).

375 求 $I=\int_{-1}^{1}(x^2-2x\cos\alpha+1)^{-1}dx\ (0<\alpha<\pi)$.

解 变换 $\int_{-1}^{0}$，然后与 $\int_0^1$ 合并得

$$I=2\int_0^1\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-4x^2\cos^2\alpha}dx$$

$$(x=\operatorname{tg}t)\quad =2\int_0^{\pi/4}\frac{dt}{1-\cos^2\alpha\sin^2 2t}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-\cos^2\alpha\sin^2 t}$$

$$(u=\operatorname{tg}t)\quad =\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}(u\sin\alpha)\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

3.5　善用已知结论

本书开头一节已指明，任何数学计算归根结底是将算式变换到足以利用已知结论. 或者干脆说，计算不过是由已知推出未知而已. 在原则上，对此想必你不致怀疑，然而在实践中，你可能经常从已知结论之旁浑然走过而无所察觉，以至错失简化的机会. 确实，有一些已知结论不太招人注意，本节正是要唤起你对这类结论的足够注意.

3.5.1　极值问题中的已知结论

首先请你用微分法解一个简单问题.

376　设 $x_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$. 证明：若 $\sum x_i=\text{const}$，则仅当 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ 时 $\prod x_i$ 达到最大；若 $\prod x_i=\text{const}$，则仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时 $\sum x_i$ 达到最小.

上题的结论已如此广为人知(大概中学生是知道的)，以至完全可以作为标准结论直接引用. 可惜，它在很大程度上被忽略. 不仅大学生，甚至一些教材或参考书都奇怪地极力避免直接使用它，这是完全不合理的. 下面的例题将说明，直接利用题 376 将会带来多大的简化.

377　分解正数 a 为 n 个正数 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 之积，使 $\sum x_i^{-1}$ 最小.

解　这相当于要求 $\prod x_i^{-1}=a^{-1}$ 时 $\sum x_i^{-1}$ 最小. 由题 376，应取 $x_i^{-1}=\sqrt[n]{a^{-1}}$，即 $x_i=\sqrt[n]{a}\ (1\leqslant i\leqslant n)$.

仿此，你可以解以下两题.

378　分解正数 a 为 n 个正数 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 之积，使 $\sum x_i^p\ (p>0)$ 为最小. $(x_i=\sqrt[n]{a_i})$.

379　分解正数 a 为 n 个正数 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 之和，使 $\prod x_i^p\ (p>0)$ 最大. $(x_i=a/n)$

380　设容积为 V 的开口长方体容器有最小表面积，求其长宽高 x,y,z.

解　表面积 $= xy + 2(xz + yz)$，而 $V = xyz = 2^{-1}\sqrt{xy \cdot 2xz \cdot 2yz}$，于是直接由题 376 得 $xy = 2xz = 2yz$，从而 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}$.

381　在底为 b 高为 h 的三角形中嵌入面积最大的矩形.

解　设嵌入矩形边长为 x,y，则 $x/b = (h - y)/h$，即 $b^{-1}x + h^{-1}y = 1$. 因此 $S = xy = bh(x/b)(y/h)$ 最最大的条件是 $x/b = y/h = 1/2$，即 $x = b/2$，$y = h/2$.

3.5.2　积分计算中的已知结论

所有已知的长度、面积与体积公式都可以作积分公式使用，例如，

$$\int_{x^2+y^2=a^2} \mathrm{d}s = 2\pi a; \tag{3.5.1}$$

$$\iint_{a^{-2}x^2+b^{-2}y^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi ab; \tag{3.5.2}$$

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=a^2} \mathrm{d}S = 4\pi a^2; \tag{3.5.3}$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi a^3. \tag{3.5.4}$$

其次，重心公式倒过来用时就是积分公式：

$$\iiint_V x\mathrm{d}v = \bar{x}\iiint_V \mathrm{d}v, \tag{3.5.5}$$

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是 V 之重心，它可能由几何考虑确定. 对于二重积分或曲面积分有类似于(3.5.5) 的公式. 至于定积分，本书已多次提到一些常用的已知结论(如参看 1.4)，你大概不会忽略它们的使用价值.

382　求曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1$ 之长 s.

解　不要匆忙地积分(你试试看，未必很好积)，实际上，这是一个

圆周，只需求出其半径 $r=\sqrt{2/3}$，立得 $s=2\pi r=2\pi\sqrt{6}/3$.

383 求 $I=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: x^2+y^2\leqslant x+y$.

解 D 是圆域 $(x-2^{-1})^2+(y-2^{-1})^2\leqslant 2^{-1}$，其面积 $S=\pi/2$，重心 $(\bar{x},\bar{y})$ 即圆心 $(1/2,1/2)$，因此 $I=(\bar{x}+\bar{y})S=\pi/2$.

仿此，你应能解类似的三维问题：

384 设 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$，求 $\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}v(=3\sqrt{3}\pi/4)$.

385 求 $I=\iint_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S, S: x^2+y^2+z^2=2ax$.

解 S 即球面 $(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$，其面积 $\sigma=4\pi a^2$，重心 $(\bar{x},y,\bar{y})=(a,0,0)$，于是

$$I=2a\iint\limits_S x\mathrm{d}S=2a\sigma\cdot\bar{x}=8\pi a^4.$$

你已注意到以上各题的解法完全不用到积分，自然，这仅适用于很特殊的情况（被积函数为线性函数）；但即使对更复杂的积分，亦可考虑部分地应用公式 (3.5.1) ~ (3.5.5) 来化简，试看：

386 求 $I=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: (x-a)^2+y^2\leqslant a^2$.

解 将坐标原点移至 $(a,0)$，得

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}[(x+a)^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}[(x^2+y^2)+2ax+a^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0+a^2\cdot\pi a^2\\
&=2\pi\int_0^a r^3\mathrm{d}r+\pi a^4=\frac{3}{2}\pi a^4.
\end{aligned}$$

在以下几章中，你将看到许多例题要部分地用到这里的方法.

3.5.3 有关级数的已知结论

关于级数展开与求和的许多已知结论已多次接触（参看 1.1，1.2，1.4，1.6 等），或许你有足够注意. 另一方面，关于级数还有以下理论结论：

设 $R = \lim\limits_{n} |a_n/a_{n+1}|$，则幂级数 $\sum a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内绝对收敛，且可逐项微分或积分任意次，所得幂级数之收敛半径仍为 R；

若 $f(z)$ 是 $|z - z_0| < R$ 内的解析函数，则级数 $\sum_0^\infty f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n/n!$ 在 $|z - z_0| < R$ 内收敛于 $f(z)$.

这些结论完全是标准的，理应随时引用，然而在具体场合仍然容易被忽略，以至一些本来极为简单的问题被复杂化了. 请看一些例子.

387 求级数 $\sum_1^\infty n 2^{2n} x^n (1 - x)^n$ 之收敛域.

解 请不要匆忙地用"比值判别法"，根本用不着！只需注意幂级数 $\sum_1^\infty n y^n$ 之收敛域为 $|y| < 1$（事实上，$\sum_1^\infty n y^{n-1} = (\sum_0^\infty y^n)' = 1/(1 - y)^2$），因此原级数的收敛域为 $|4x(1 - x)| < 1$，这相当于 $0 < |x - 1/2| < 1/\sqrt{2}$.

有鉴于此，对于类似的问题你就清醒了.

388 求级数 $\sum_1^\infty (2n + 1)^{-1} x^n (1 + x)^{-n}$ 的收敛域（$x \geqslant -1/2$）.

389 设 $\sum a_n$ 收敛，证明当 $e^{-1} < x \leqslant e$ 时级数 $\sum a_n \ln^n x$ 收敛.

证 你很可能一时不知选用什么收敛判别法好（试想用"比值法"或"比较法"可行吗?）如果与幂级数联系起来，问题就显得很简单：$\sum n$ 收敛意味着 $y = 1$ 不在 $\sum a_n y^n$ 的收敛区间之外，因而 $\sum a_n y^n$ 之收敛域至少包含 $-1 < y \leqslant 1$，于是 $\sum a_n \ln^n x$ 至少对 $-1 < \ln x \leqslant 1$ 收敛，这正是所要证.

390 设 $\sum a_n$ 收敛，研究函数 $f(x) = \sum_0^\infty a_n e^{-nx^2}$ 的连续性与

可微性.

解 有上题的经验，你容易想到用关于幂级数的现成结论：令 $\varphi(y)=\sum_0^{\infty}a_ny^n$，则 $f(x)=\varphi(e^{-x^2})$. 由 $\sum a_n$ 收敛知 $\sum a_ny^n$ 在 $|y|<1$ 内收敛，从而 $\varphi(y)$ 在 $|y|<1$ 内无限次可微，因此 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 时无限次可微.

3.6 避免无用计算

如果你与别人做同一道题但费去较多时间，而又并不感到动作迟缓，那么不妨考虑一下，你是否做了一些实际上根本不需要做的事情？或许正是因为你将时间白白耗费在"无用计算"上，才使你落后于人. 避免无用计算，是简化解题过程的要则之一. 你会说自己总不至于愚钝到去干一些纯属多余的事，可是问题在于，即使行家有时也难免不经意地白干一番. 要恰到好处，实在不易，这实际上牵涉到本书中许多其它方法，本节只是用一些初步的例子解释避免无用计算的好处.

391 求 $l=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x\ln[(2+\sin x+\cos^2x)/(1-\sin x)]$.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$，而余下部分有界，故能断定 $l=0$，进一步的计算是多余的.

392 设 $f(x)=x(x-1)\cdots(x-100)$，求 $f'(0)$.

解 首先你应知道，对任何多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n(n\geqslant 1)$，有 $f'(0)=a_1$，它与 $a_0,a_2,\cdots,a_n$ 完全无关. 在本题中 $f(x)=100!x+a_2x^2+\cdots$，因此 $f'(0)=100!$. 注意这里既不必展开 $x(x-1)\cdots(x-100)$，亦不必用 Leibniz 规则.

393 设 $f(x)=x^2(x^2+1)(2x^2+1)\cdots(nx^2+1)$，求 $f''(0)(=2)$.

394 设 $f(x)=\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}-1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x^2}{4}-2\right)\cdots$

$\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x^{100}}{4}-100\right)$，求 $f'(1)$.

解 令 $f(x)=\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}-1\right)g(x)$，则 $g(1)=-99!$，于是

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}\cdot g(1)+0\cdot g'(1)=\frac{\pi}{2}g(1)=-\frac{\pi}{2}99!$$

上题中计算 $g'(1)$ 是多余的. 一般地，若 $f(x)=g(x)h(x)$，则 $f'(a)=g'(a)h(a)+g(a)h'(a)$，当 $h(a)=0$ 时有 $f'(a)=g(a)h'(a)$，若去算出 $g'(a)$，则是无用计算. 更一般地，可概括出以下规则：若要计算的量 Q 可表为 $Q=\sum u_iv_i$，则你必须敏锐地注意到那些使 $u_i=0$ 的项，对这些项，v_i 的计算是多余的. 现在你去试做几例加以体会.

395 设 $f(x)=\sin x\operatorname{arctg}[1+x)/(1+x^2)]$，求 $f'(0)(=\pi/4)$.

396 设 $f(x)=x^2\ln(x+\sqrt{x^2+x+2})$，求 $f''(0)(=\ln 2)$.

397 设 $u=xy+x^2\operatorname{arctg}(x/\sqrt{y^2+1})$，求 $Q=u_{xy}^2(0,0)-u_{xx}(0,0)u_{yy}(0,0)$.

解 令 $v=\operatorname{arctg}(x/\sqrt{y^2+1})$，则 $u=xy+x^2v$，$u_{xx}(0,0)=2v(0,0)=0$，$u_{xy}(0,0)=1$，于是 $Q=1$.

注意上例中不必计算 v_x,v_y,v_{xx},v_{yy} 等，也不必写出 u_{xx} 的表达式. 下题的情况是类似的.

398 设 $u=x^2e^{xy}\ln(x+y+\sqrt{x^2+y^2+3})$，求 $Q=u_{xy}^2(0,0)-u_{xx}(0,0)u_{yy}(0,0)(=0)$.

399 设 $z(x,y)$ 满足方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$，求 $z(x,y)$ 的极值点.

解 注意在极值点 $dz=0$. 微分所给方程得：

$$4(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) + (2z + 8x - 1)\mathrm{d}z + 8z\mathrm{d}x = 0. \tag{3.6.1}$$

置 $\mathrm{d}z = 0$ 得 $(x + 2z)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$，从而 $x + 2z = y = 0$；这与原方程一起得出稳定点 $(16/7,0)$，$(-2,0)$. (3.6.1) 微分一次后置 $\mathrm{d}z = 0$ 得

$$4(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + (2z + 8x - 1)\mathrm{d}^2z = 0, \tag{3.6.2}$$

因此 $\mathrm{d}^2z = 4(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)/(1 - 2z - 8x)$，可见在稳定点有 $z_{xx} = z_{yy} = 4/(1 - 2z - 8x) = 4/(1 - 7x)$（注意已有 $x + 2z = 0$），$z_{xy} = 0$，于是 $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 > 0$，因此得出 $(16/7,0)$ 与 $(-2,0)$ 分别为极大值点与极小值点.

注意上题无需求出 z_x, z_y, z_{xx} 等的一般表达式.

400 设 $z = z(x,y)$ 满足 $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2(x + y + z) = 2$，求 z 的极值（$x = y = -3 + \sqrt{6}$ 时 $z_{\max} = -4 + 2\sqrt{6}$，$x = y = -3 - \sqrt{6}$ 时 $z_{\min} = -4 - 2\sqrt{6}$）.

401 设 $a > 0$，$ac > b^2$，求随圆 $ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqslant 1$ 之面积 S.

解 由线性代数知，可通过正交变换化二次型 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ 为 $\lambda\xi^2 + \mu\eta^2$，其中 λ,μ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 的特征值. 因此椭圆两半轴为 $1\sqrt{\lambda}$，$1/\sqrt{\mu}$，从而 $S = \pi/\sqrt{\lambda\mu}$. 因 $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$，故 $\lambda\mu = ac - b^2$，于是 $S = \pi/\sqrt{ac - b^2}$.

上题中，解出 λ,μ 是无用计算.

402 求上题中椭圆两半轴平方和（$= (a + c)/(ac - b^2)$）

403 设 $f(x) = \mathrm{arctg}x$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 由 $f(x) = \int_0^x (1 + t^2)^{-1}\mathrm{d}t$ 易得 $f(x) = \sum_0^\infty(-$

$1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$，因此 $f^{(2n)}(0)=0, f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!$.

对于上题，尽管可求出 $f^{(n)}(x)$（参考题 241），但并无必要.

3.7 合并同类计算

如果待计算的一组量 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 存在特殊关系，那么在一定条件下可将其计算合并在一个算式中进行，从而简化计算过程.

3.7.1 利用向量计算

给定函数 $u(x,y,z)$，设要求 u_x, u_y, u_z. 在某些情况下通过计算 ∇u 同时得到 u_x, u_y, u_z 有其方便.

404 设 $u=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 u_x, u_y, u_z.

解 令 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}, r=|\boldsymbol{r}|$（以下仿此），则

$$\nabla u=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

由此得 $u_x=-xr^{-3}, u_y=-yr^{-3}, u_z=-zr^{-3}$.

405 设 $u=f(x^2+y^2+z^2)$，f 可微，求 u_x, u_y, u_z，($u_x=2xf(x^2+y^2+z^2)$，u_y、u_z 类此).

406 设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\operatorname{tg}(u^2/\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，求 u_x，u_y, u_z.

解 对等式 $u=r\operatorname{tg}(u^2/r)$ 两边求梯度：

$$\begin{aligned}\nabla u&=(\nabla r)\operatorname{tg}(u^2/r)+r\sec^2(u^2/r)\nabla(u^2/r)\\&=(\boldsymbol{r}/r)\operatorname{tg}(u^2/r)+r\sec^2(u^2/r)(2ur^{-1}\nabla u-u^2r^{-3}\boldsymbol{r}),\end{aligned}$$

由此解出 $\nabla u=\boldsymbol{r}(r\sin 2v-2u^2)/(2r^2\cos^2 v-4ur^2)$，$v=u^2/r$. 于是 $u_x=x(r\sin 2v-2u^2)/(2r^2\cos^2 v-4ur^2)$，$u_y$、$u_z$ 仿此.

3.7.2 利用矩阵计算

当需要解线性方程组时，可采用矩阵算法. 对于二阶矩阵求逆，记住以下公式不无好处：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

407 设 $x = ue^v, y = u\sin v, z = uv$，求 z_x, z_y.

解 因 x_u, y_u, z_u 等易算出，故首先得出：

$$\begin{cases} v = z_u = z_x e^v + z_y \sin v; \\ u = z_v = z_x u e^v + z_y u\cos v \end{cases}$$

由此解出

$$\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^v & \sin v \\ ue^v & u\cos v \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ue^v(\cos v - \sin v)}\begin{pmatrix} u\cos v & -\sin v \\ -ue^v & e^v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{v\cos v - \sin v}{e^v(\cos v - \sin v)}, \frac{1-v}{\cos v - \sin v}\right)^T \quad (T \text{ 记转置}).$$

408 设 $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$，求 z_x, z_y ($z_x = -3uv, z_y = 3(u+v)/2, u \neq v$).

409 设 $x = u\cos(v/u), y = u\sin(v/u)$，求 u_x, u_y, v_x, v_y.

解 令 $w = v/u$，利用 Jacobi 矩阵的性质有：

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos w + w\sin w & -\sin w \\ \sin w - w\cos w & \cos w \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ w\cos w - \sin w & \cos w + w\sin w \end{pmatrix}.$$

410 设 $x = e^u + u\sin v, y = e^u - u\cos v$，求 u_x, u_y, v_x, v_y，($u_x = qu\sin v, u_y = -qu\cos v, v_x = q(\cos v - e^u), v_y = q(e^u + \sin v)$,

$q^{-1} = ue^u(\sin v - \cos v) + u)$.

411 设 $x = u^{-1} + v^{-1}, y = u^{-2} + v^{-2}, z = u^{-3} + v^{-3} + e^x$，求 z_v, z_y.

解 此题中变元的地位容易混淆，用全微分比较可靠. 微分所给方程得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -u^{-2}\mathrm{d}u - v^{-2}\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y = -2u^{-3}\mathrm{d}u - 2v^{-3}\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}z = -3u^{-4}\mathrm{d}u - 3v^{-4}\mathrm{d}v + e^x\mathrm{d}x. \end{cases}$$

应消去 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}u$，故用以下演算

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & u^{-2} & 0 \\ 0 & -2u^{-3} & 0 \\ e^x & -3u^{-4} & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -v^{-2}\mathrm{d}v \\ 2v^{-3}\mathrm{d}v + \mathrm{d}y \\ 3v^{-4}\mathrm{d}v \end{pmatrix} \\ &= \frac{u^3}{2}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \dfrac{2e^x}{u^3} & \dfrac{e^x}{u^2} + \dfrac{3}{u^4} & -\dfrac{2}{u^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v^{-2}\mathrm{d}v \\ 2v^{-3}\mathrm{d}v + \mathrm{d}y \\ 3v^{-4}\mathrm{d}v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由此得 $\mathrm{d}z = u^{-1}v^{-4}(u - v)(uve^x - 3)\mathrm{d}v + [(3/2u) + 2^{-1}ue^x]\mathrm{d}y$，式中 $\mathrm{d}v, \mathrm{d}y$ 之系数即要求的 z_v, z_y.

3.7.3 利用复数计算

在 1.2.6 中你已尝到使用复数的好处. 实际上，一个复数 $w = u + iv$ 包含一对实数 u, v，这一事实本身就足以启示你去利用 w 同时计算 u, v. 当然，要使施于 w 的演算能顺利完成，u 与 v 之间应有某种关联，以便利用 Euler 公式一类的结果. 因此下面的例题都与三角函数有关.

412 将 $\sin nx, \cos nx (n \geqslant 1)$ 表为 $\sin x, \cos x$ 的多项式（与题 33 对照）.

解 关键在于注意到 $\mathrm{con}\,nx + i\sin nx = e^{inx}$，而

$$
\begin{aligned}
e^{inx} &= (e^{ix})^n = (\cos x + i\sin x)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k} x \sin^k x \\
&= \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x \\
&\quad + i \sum_{K=1}^{L} (-1)^{(k-1)} \binom{n}{2k-1} \cos^{n-2k+1} x \sin^{2k-1} x,
\end{aligned}
$$

其中 $K = [\pi/2], L = [(n+1)/2]$. 因此

$$
\begin{cases}
\cos nx = \sum\limits_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x; \\
\sin nx = \sum\limits_{k=0}^{L} (-1)^{k-1} \binom{n}{2k-1} \cos^{n-2k+1} x \sin^{2k-1} x.
\end{cases}
$$

413 求 $u = \sum_0^n \cos kx, v = \sum_1^n \sin kx$.

解 由 $w = u + iv = \sum_0^n e^{ikx}$ 得

$$
w = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{(1 - e^{i(n+1)x}(1 - e^{-ix})}{2(1 - \cos x)},
$$

故 $$u = \frac{\sin \dfrac{n+1}{2} x \cos \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}, v = \frac{\sin \dfrac{n+1}{2} x \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

推广上题的解法，可解某些余弦级数与正弦级数的求和问题：若要求 $\sum a_n \cos nx$ 与 $\sum a_n \sin nx$，则只需求出 $S(z) = \sum a_n z^n$，然后令 $z = e^{ix}$.

414 求 $u = \sum_2^\infty (-1)^n (n^2 - 1)^{-1} \cos nx, v = \sum_2^\infty (-1)^n (n^2 - 1)^{-1} \sin nx$.

解 首先完成以下幂级数求和：

$$
S(z) = \sum_2^\infty \frac{(-1)^n z^n}{n^2 - 1}
$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)z^{n}$$
$$= \frac{z}{2}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{n}}{n}-\frac{1}{2z}\sum_{3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{n}}{n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\ln(1+z)+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}.$$

代以 $z = e^{ix}$，并注意 $\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$，有

$$u + iv = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})\ln(1 + e^{ix}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{ix}$$
$$= i\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}e^{ix/2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{ix}$$
$$= i\sin x\left[\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) + \frac{ix}{2}\right] + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{ix},$$

故得 $u = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} - \frac{x\sin x}{2}$，$v = \sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{4}$ $(|x| < \pi)$.

415 求 $u = \sum_{0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$，$v = \sum_{0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$.

答案： $u = e^{\cos x}\cos(\sin x)$，$v = e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

最后，考虑积分

$$\int f(x)e^{ix}\mathrm{d}x = \int f(x)\cos x\mathrm{d}x + i\int f(x)\sin x\mathrm{d}x.$$

416 求 $I = \int x^{2}\cos x\mathrm{d}x$，$J = \int x^{2}\sin x\mathrm{d}x$.

解 用分部积分得出

$$\int x^{2}e^{ix}\mathrm{d}x = (-ix^{2} + 2x + 2i)e^{ix} + C,$$

于是 $I = 2x\cos x + (x^{2} - 2)\sin x + C_{1}$，$J = 2x\sin x + (2 - x^{2})\cos x + C_{2}$.

3.8 变量替换

你在解题时曾得益于变量替换吗？在简化演算的多种方法之

中，很少有哪一种如变量替换一样简单、常用且有效的了．一些典型的变量替换，如积分计算中的三角代换、极坐标代换，解微分方程的某些常用代换，已经充分标准化，因而无需多少技巧即能运用自如．至于那些散见于各种问题中的特殊代换，则并未规范化且颇需技巧，通常易被忽略，因此本节特别加以强调．

3.8.1 极限计算中的变量替换

基本的原理是：

$$\lim_{x\to a}\varphi(g(x))=\lim_{t\to b}\varphi(t),\tag{3.8.1}$$

其中$g(x)$满足$g(x)\to b(x\to a)$．(3.8.1)式右边极限愈易计算，代换$t=g(x)$的效果就愈好．对于一待求的极限$\lim f(x)$，应如此选定φ,g，使得$f(x)=\varphi(g(x))$，φ是较好的函数，如有理函数．

417 求$l=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x})/\sin^2 x$．

解 令$t=\sqrt[6]{\cos x}$，则$\sin^2 x=1-t^{12}$，于是

$$l=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=\lim_{t\to 1}\frac{3t^2-2t}{-12t^{11}}=-\frac{1}{12}.$$

418 求$l=\lim\limits_{x\to 0}[(1+e^x)/2]^{\operatorname{cth}x}$．

解 令$t=e^x$，且取对数：

$$\begin{aligned}\ln l&=\lim_{t\to 1}\frac{t+t^{-1}}{t-t^{-1}}\ln\frac{1+t}{2}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^2+1}{(1+u)^2-1}\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)\qquad(t=1+u)\\&=\lim_{u\to 0}\frac{2}{2u+u^2}\cdot\frac{u}{2}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此 $l=\sqrt{e}$．

以上解法中用了两次代换，合并起来就是$u=e^x-1$．当然一开始就可用此代换，但从便于观察的角度看，分两次进行更自然些．

下面由你解几个类似的问题.

419 求 $l=\lim\limits_{x\to\pi/4}(1-\mathrm{ctg}^3x)/(2-\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}^3x)$. ($l=3/4$).

420 求 $l=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt[m]{\mathrm{ch}x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}x})^{-1}\ln\mathrm{ch}x\quad(m\neq n)$.

提示:令 $t=\sqrt[mn]{\mathrm{ch}x}$. $l=mn/(n-m)$.

421 求 $l=\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec(\pi x/2)}$.

提示:令 $x=1-t$, $l=e^{2/\pi}$.

422 求 $l=\lim\limits_{x\to0}[2e^{x/(x+1)}-1]^{(x^2+1)/x}$.

解 令 $t=x/(1+x)$,并取对数:

$$\ln l=\lim_{t\to0}\frac{1-2t+2t^2}{t-t^2}\ln(2e^t-1)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2(e^t-1)}{t(1-t)}=2,$$

于是 $l=e^2$.

3.8.2 微分计算中的变量替换

若 $f(x)=g(u)$,则 $f'(x)=g'(u)u'_x$. 引入"中间变量"u 可能化简表达式或避免重复计算. 有些中间变量的用法是标准的,如 $r=\sqrt{x^2+y^2}$(或 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$),$\theta=\mathrm{arctg}(y/x)$,这些用法你在本书多有所见;更多的用法则依具体情况而定,不那么规范. 下面通过两个例子加以说明.

423 设 $z=(x^2-y^2)\mathrm{tg}(z/\sqrt{x^2-y^2})$,求 z_x,z_y.

解 令 $u=\sqrt{x^2-y^2}$,$v=z/u$,则 $z=u^2\mathrm{tg}v$,$u\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y$,

$$\mathrm{d}z=2u\mathrm{d}u\mathrm{tg}v+(u\mathrm{d}z-z\mathrm{d}u)\sec^2v,$$

由此解出 $\mathrm{d}z$ 并代入 $u\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y$,得

$$\mathrm{d}z=\frac{2u\mathrm{tg}v-z\sec^2v}{u-u^2\sec^2v}u\mathrm{d}u=\frac{z(zu^3-u^4-z^2)}{u^2(u^3-u^4-z^2)}(x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y),$$

于是
$$\begin{cases} z_x = \dfrac{xz(2u^3 - u^4 - z^2)}{u^2(u^3 - u^4 - z^2)}, \\ z_y = -\dfrac{yz(2u^3 - u^4 - z^2)}{u^2(u^3 - u^4 - z^2)}. \end{cases}$$

424 设 $u = \arcsin(x/\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

解 令 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，$v = x/r$，则 $u = \arcsin v$，$r'_x = v$，$r'_y = y/r = \sqrt{1-v^2}$. 算出

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{y^2}{r^3} = \frac{y}{r^2}, u_{xx} = -\frac{2xy}{r^4}.$$

类似地有 $u_y = -x/r^2$，$u_{yy} = 2xy/r^4$，于是 $\Delta u = 0$.

3.8.3 级数问题中的变量替换

对一函数级数进行变量替换的目的是使其呈现出最简单的面貌（最好变为幂级数），从而便于研究其性质（如收敛性，和函数的分析性质等），或解决展开与求和问题. 在 3.5.3 中实际上已考虑了变量替换，现在再举几个例子.

425 求级数 $\sum_1^\infty (-1)^n (2n-1)^{-1} 2^{-n} \exp[2n(1-x^2)]$ 的收敛域.

解 令 $y = 2^{-1}\exp[2(1-x^2)]$，将原级数简化为 $\sum_1^\infty (-1)^n (2n-1)^{-1} y^n$. 易见此级数之收敛域为 $-1 < y \leqslant 1$，换成原变量就是 $|x| \geqslant (1 - \ln\sqrt{2})^{1/2}$.

426 求 $S(x) = \sum_1^\infty n 2^n (1+x^2)^{-n}$.

解 令 $y = 2/(1+x^2)$，则

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_1^\infty n y^n = y\left(\sum_0^\infty y^n\right)' \\ &= y[(1-y)^{-1}]' = y(1-y)^{-2} \\ &= 2(1+x^2)(1-x^2)^{-2} (|x| > 1). \end{aligned}$$

427 展开 $f(x) = x^2$ 为 $x/\sqrt{1+x^2}$ 的幂级数.

解 令 $t = x/\sqrt{1+x^2}$，则

$$f(x)=\frac{t^2}{1-t^2}=\sum_1^{\infty}t^{2n}=\sum_1^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2n}\ (|x|<\infty).$$

428 展开 $f(x)=(2-x)^{-1}$ 为 $(1-x)/(1+x)$ 的幂级数($f(x)=\sum_0^{\infty}(-1)^n3^n[(1-x)/(1+x)]^n, 1/2<x<2$).

3.9 延迟代入原则

本节标题乍看之下有些不知所云,且让你看过具体例子之后再作解释.

3.9.1 微分学问题

429 设 $z=(x^2+1)y\ln(y^2+\sqrt{x+y^2+1})$,求 $A=(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)|_{(0,0)}$.

解 令 $u=\ln(y^2+\sqrt{x+y^2+1})$,则 $z=(x^2+1)yu$, $z_y=(x^2+1)(u+yu_y)$, $z_{xy}(0,0)=u_x(0,0)$, $z_{yy}(0,0)=2u_y(0,0)=0$,于是 $A=-z_{xy}^2(0,0)=-u_x^2(0,0)=-1/4$.

上题中, $\ln(y^2+\sqrt{x+y^2+1})$ 这个较长的式子必然使算式繁冗,因此代之以中间变元 u. 演算过程中出现的 u_x, u_y 不应急于写出具体表达式(即所谓延迟代之),以免多余的计算. 一般说来,演算过程中多次或多处出现的式子应代之以中间变元,且必到适当的时候才以具体表达式代入. 那些可能被消去或约掉的中间变元更不宜代入具体表达式. 现在你就来解一个类似于题 429 的问题以加深体会.

430 设 $z=xy(xy-1)\mathrm{arctg}(x^2y(x^2+1)^{-3/2})$,求 $(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)|_{(0,0)}$ $(=0)$.

431 设 $\varphi\in C^2$, $z=\varphi(e^x\cos y, e^x\sin y)$,求 $\Delta z=z_{xx}+z_{yy}$.

解 令 $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$,则 $z_x=\varphi_u u_x+\varphi_v v_x$,

$$z_{xx} = \varphi_{uu}u_x^2 + 2\varphi_{uv}u_xv_x + \varphi_{vv}v_x^2 + \varphi_u u_{xx} + \varphi_v v_{xx}.$$

对 z_{yy} 有类似表达式(不必写出),合起来得到:

$$\Delta z = \varphi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\varphi_{uv}(u_xv_x + u_{y}v_{y}) \\ + \varphi_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \varphi_u\Delta u + \varphi_v\Delta v. \qquad (3.9.1)$$

注意至此尚未代入 u_x, v_x 等的具体表达式. 算出

$$u_x = e^x\cos y = v_y, u_y = - e^x\sin y = - v_x,$$

据此得到 $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = e^{2x}, u_xv_x + u_yv_y = 0, \Delta u = \Delta v = 0$,以此代入(3.9.1)得 $\Delta z = e^{2x}(\varphi_{uu} + \varphi_{vv})$.

432 设 $\varphi \in C^2, z = \varphi(xr^{-2}, yr^{-2}), r = \sqrt{x^2 + y^2}$,求 Δz.

提示:仿照上题,$\Delta z = r^{-4}(\varphi_{11} + \varphi_{22})$.

433 设 $\varphi \in C^2, \varphi(cx - az, cy - bz) = 0$,求 z_{xx}.

解 令 $u = cx - az, v = cy - bz$. 从 $\varphi_u u_x + \varphi_v v_x = 0$ 易解出 $z_x = c\varphi_u/\omega, \omega = a\varphi_u + b\varphi_v$(引入 ω 是重要的一步!). 由 $c^{-1}z_{xx} = [(\varphi_u)_x\omega - \varphi_u\omega_x]/\omega^2$ 得

$$\begin{aligned} c^{-1}\omega^2 z_{xx} &= \omega(\varphi_{uu}u_x - \varphi_{uv}v_x) - \varphi_u(a\varphi_{uu}u_x + a\varphi_{uv}v_x \\ &\quad + b\varphi_{uv}u_x + b\varphi_{uv}v_x) \\ &= (\omega\varphi_{uu} - a\varphi_u\varphi_{uu} - b\varphi_u\varphi_{uv})u_x + (\omega\varphi_{uv} \\ &\quad - a\varphi_u\varphi_{uv} - b\varphi_u\varphi_{vv})v_x \\ &= b(\varphi_v\varphi_{uu} - \varphi_u\varphi_{uv})(c - az_x) \\ &\quad + b^2(\varphi_u\varphi_{uv} - \varphi_v\varphi_{uv})z_x. \end{aligned}$$

以 $z_x = c\varphi_u/\omega$ 代入整理后得

$$z_{xx} = bc^2\omega^{-3}[\omega(\varphi_v\varphi_{uu} - \varphi_u\varphi_{uv}) \\ + \varphi_u(b\varphi_u\varphi_{vv} - b\varphi_v\varphi_{uv} + a\varphi_u\varphi_{uv} - a\varphi_v\varphi_{uu})].$$

434 设 $\varphi \in C^1, z = \varphi(x, y)$. 以 $x = uv, y = (u^2 - v^2)/2$ 变换 $z_x^2 + z_y^2$.

解 无需用到 x, y 与 u, v 间的具体关系得出:

$$z_x^2 + z_y^2 = (z_u u_x + z_v v_x)^2 + (z_u u_y + z_v v_y)^2$$
$$= z_u^2(u_x^2 + u_y^2) + 2z_u z_v(u_x v_x$$
$$+ u_y v_y) + z_v^2(v_x^2 + v_y^2). \qquad (3.9.2)$$

对等式 $x = uv, 2y = u^2 - v^2$ 关于 x 求导，得 $vu_x + uv_x = 1, uu_x - vv_x = 0$，由此解出 $u_x = -v_y = v/(u^2 + v^2)$. 类似地可得 $v_x = u_y = u/(u^2 + v^2)$. 代入(3.9.2) 得 $z_x^2 + z_y^2 = (z_u^2 + z_v^2)/(u^2 + v^2)$.

在上例中，不应急于代入 u_x, u_y 等. 基于同一考虑，你可以解下题.

435 设 $\varphi \in C^1, z = \varphi(x, y)$，以 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 变换 $z_x^2 + z_y^2 (= z_r^2 + r^{-2} z_\theta^2)$.

3.9.2 积分学问题

436 求曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \sqrt{x^2 + y^2}\operatorname{ch}\operatorname{arctg}(y/x) = a$ 上从 $(a, 0, 0)$ 到 (x_0, y_0, z_0) 的一段 L 之长 $s, z_0 > 0$.

解 要求者 $s = \int_L ds$. 用柱面坐标 (r, θ, z)，曲线方程化为 $r^2 + z^2 = a^2, r\operatorname{ch}\theta = a$，由此得 $rdr + zdz = 0, \operatorname{ch}\theta dr + r\operatorname{sh}\theta d\theta = 0$，其次 $dx^2 + dy^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$，于是

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2 + dz^2 = (\operatorname{cth}^2\theta + 1)dr^2 + dz^2$$
$$= [(\operatorname{cth}^2\theta + 1)r^{-2}z^2 + 1)]dz^2 = \frac{2a^2}{a^2 - z^2}dz;$$
$$s = \sqrt{2}a\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sqrt{2}\arcsin\frac{z_0}{a}.$$

注意上题中变元 r, θ 最终被消去，因此无需写出它们与 z 的明显关系.

437 求曲线 $x^2 - y^2 = cz (c > 0), y/x = \operatorname{tg}(z/c)$ 上从原点到 $(x_0, y_0, z_0)(z_0 > 0)$ 的一段之长 s.

解 仿上题，$s = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{z_0}\left(\sqrt{z} + \frac{c}{2\sqrt{z}}\right)dz = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{z_0}{c}}(2z_0 + 3c)$.

438 求球带 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2(a/4 \leqslant z \leqslant a/2)$ 之面积 σ.

解 以 S 记所给曲面块，则 $\sigma = \iint\limits_S dS$，因 $dS = a|z|^{-1}dxdy$（请熟记此式！），故 $\sigma = \iint\limits_D az^{-1}dxdy$，$D$ 是 S 在 xy 平面上的投影. 为算此积分，不应急于代入 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$（你必不喜欢根式）. 用柱面坐标有 $r^2 + z^2 = a^2$，$rdr + zdz = 0$；$dxdy = rdrd\theta = - zdzd\theta$，于是

$$\sigma = - 2\pi a\int_{a/2}^{a/4}dz = \frac{\pi a^2}{2}.$$

注意，保留 z 的结果使积分自动得出！

439 求 $I = \iint\limits_S(x^2 + y^2 + z^2)dS$，$S$ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 的上半部分.

解 首先注意 $I = \iint\limits_S 2azdS = a(z - a)^{-1}dxdy$. 不去代入 $z - a = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，而是作以下分解：

$$I = 2a\left[\iint\limits_S(z - a)dS + a\iint\limits_S dS\right]$$

$$= 2a^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}dxdy + 2a^2 \cdot 2\pi a^2 = 6\pi a^4.$$

注意上述算法实际上免去了积分！

440 求 $I = \iint\limits_S(x^2 + z^2)dS$，$S$ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上以 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$ 与 $(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$ 为顶点的球面三角形.

解 因 $\mathrm{d}S = z^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = x^{-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，故

$$I = \iint_{D_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{D_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2,$$

D_1, D_2 分别为 S 在 yz 平面与 xy 平面上之投影. 现在不应急于计算 I_1, I_2，因 D_1 移至 xy 平面上恰与 D_2 拼成 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1, x, y \geqslant 0$，故 $I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi/6$.

441 设 $x'' + 2mx' + n^2x = 0, 0 < n < m, x(0) = a, x'(0) = b$，求 $I = \int_0^\infty x(t)\mathrm{d}t$.

解 由微分方程知识有 $x = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}$，$\lambda, \mu$ 是 $l^2 + 2m\lambda + n^2 = 0$ 的两负根，因此 $x(\infty) = x'(\infty) = 0$，

$$\begin{aligned} I &= -n^{-2}\int_0^\infty [x''(t) + 2mx'(t)]\mathrm{d}t. \\ &= n^{-2}[x'(0) + 2mx(0)] = n^{-2}(b + 2ma). \end{aligned}$$

注意计算积分时不必代入 $x(t)$ 的表达式.

3.10 避用分式

你多半不喜欢在演算中出现分式. 首先，在书写时分式占据更大的空间；其次，对于分式的各种演算通常更麻烦，如求 $\mathrm{d}(u/v)$ 就是如此. 显然，完全排除分式并不现实. 不过，只要有变通办法，就应避用分式. 这样做的方法很多，其中一些方法将在下面例题中示明.

442 设 $z = x/f(x^2 - y^2), f \in C^2$，求 z_{xx}.

解 令 $f = f(u), u = x^2 - y^2$，则 $zf = x$. 对此等式相继微分两次后得 $z_x f + 2xzf' = 1$，

$$z_{xx}f + (4xz_x + 2z)f' + 4x^2xf'' = 0.$$

由以上两式消去 z_y 后得 $z_{xx} = (8x^2zf'^2 - 6xf' - 4x^3f'')/f^2$.

若 $f = g/h$,则 f' 的符号决定于 $g'h - gh'$. 在涉及单调性的问题中应注意这一点.

443 研究 $f(x) = x/(1+x^2)$ 的单调性与极值.

解 首先算出

$$(1+x^2)^2f'(x) = 1 + x^2 - x \cdot 2x = 1 - x^2.$$

由此看出,当 $|x| < 1$ 时 $f'(x) > 0$;当 $|x| > 1$ 时 $f'(x) < 0$;$f'(\pm 1) = 0$. 因此 $f(x)$ 在 $|x| < 1$ 时严格增,在 $|x| > 1$ 时严格减,$f(-1) = -1/2$ 与 $f(1) = 1/2$ 分别为极小值与极大值.

建议你用同一模式解下题.

444 研究 $f(x) = x^3(1+x^2)^{-2}$ 的单调性与极值.

结论:$f(x)$ 在 $|x| < \sqrt{3}$ 内严格增,$|x| > \sqrt{3}$ 时严格减,$f(-\sqrt{3}$ 与 $f(\sqrt{3})$ 分别为极小值与极大值.

不等式证明问题一般宜避开分式.

445 证明$(x^2 + x)/(e^{2x)} - 1) < 1/2(x > 0)$.

证 因 $e^{2x} > 1(x > 0)$,故可化要证不等式为:

$$f(x) = e^{2x} - 1 - 2x^2 - 2x > 0(x > 0).$$

由 $f''(x) = 4e^{2x} - 4 > 0(x > 0)$ 及 $f(0)f'(0) = 0$ 即得所要证(参考 7.2.1).

一般地,若 $v > 0$,则可用 $u > bv$ 替换 $u/v > b$. 不过. 也不可一概而论(参看题 773).

446 证明 $x\sin x/(1 - \cos x) > 1(0 < x < \pi/2)$.

取对数是去掉分式的常用方法,如下题.

447 设 $u = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\dfrac{(x-b)^2}{4a^2t}\right]$,$a > 0$,证明 $u_t = a^2u_{xx}$.

证 先取对数然后求导得:

$$\ln u = -\ln(2a\sqrt{\pi}) - \frac{1}{2}\ln t - \frac{(x-b)^2}{4a^2t};$$

$$u_t = u\left[-\frac{1}{2t} + \frac{(x-b)^2}{4a^2t^2}\right], u_x = -\frac{(x-b)}{2a^2t}.$$

于是
$$a^2u_{xx} = -\frac{1}{2t}[u + (x-b)u_x]$$
$$= -\frac{u}{2t}\left[1 - \frac{(x-b)^2}{2a^2t}\right] = u_t.$$

你用取对数的方法解下题：

448 设 $u = x(ye^x + 1)/\sqrt{x^2+y^2}$，求 u_x, u_y.

答案： $u_x = u\left(\frac{1}{x} + \frac{ye^x}{ye^x+1} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)$，

$$y_y = u\left(\frac{e^x}{ye^x+1} - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

将避用分式的思想展开来，启示出更一般的想法："逆运算"通常要困难些. 应尽可能代之以"正运算"，如用乘方代开方、以微分代积分，等等.

449 证明 $n < e\sqrt[n]{n!}\ (n \geqslant 1)$.

证 先将不等式化为 $n^n < e^n n!$，然后用归纳法，而这只需证(参看2.4.1) $n^{-n}(n+1)^{n+1} < e(n+1)$，这归于熟知的不等式 $(1+n^{-1})^n < e$(看题769).

下面是以微分代积分的例子.

450 设 $f \in C[a,b]$，证明 $\exists\, \xi \in (a,b)$：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

证 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，，则要证等式化为：$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$，这恰是 Lagrange 中值定理的结论.

第四章　对称性原则

在艺术的各种要素中，大概再没有比对称性更重要的了．自然，“解题的艺术”这一课题不能不考虑对称性．实际上，当你使用$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$这样的初等公式时，就已经注意到对称性了．然而，你能系统地、充分地、有效地运用对称性原则吗？本章正是要帮助你作到这一点．许多问题初看起来似乎不易解决，但一旦恰当地利用了某种对称性，就会易如反掌．

关于对称性的最一般的描述不是一件简单的事，下面只概述最必要的术语．称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为对称（反对称）函数，若任意变换两变元x_i,x_j后函数不变（改变符号），说一空间图形G关于x,y,z对称，若当$(x,y,z)\in G$时(x,y,z)的任意重排$(u,v,w)\in G$．对称图形通常由对称函数表述的方程描述．

4.1　微分学问题

若$u(x,y)\equiv u(y,x)$，则$u_y(x,y)=u_x(y,x)$．可见一旦求出u_x，即可直接写出u_y．一般地，若$u(x_1,\cdots,x_n)$是对称函数，则只要求出$\partial u/\partial x_1$，即可写出任何$\partial u/\partial x_i(2\leqslant i\leqslant n)$．以上事实对于解题能带来多大简化呢？且看下面的例题．

451　设$u=xy\sqrt{x^2+y^2}$，求$\triangle u=u_{xx}+u_{yy}$．

解　令$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则$r_x=x/r$，$ru=xy$，微分两次：

$$u_x=yr^{-1}-x^2yr^{-3};u_{xx}=3u(x^2r^{-4}-r^{-2}).$$

由对称性，可直接写出 $u_{yy}=3u(y^2r^{-4}-r^{-2})$，于是 $\triangle u=-ur^{-2}=-3u/(x^2+y^2)$.

452 设 $u=\sqrt{x^2+y^2}\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\triangle u$.

解 $\triangle u=(r^{-1}-r^{-3})\sin r^{-1}-r^{-2}\cos r^{-1}, r=\sqrt{x^2+y^2}$

453 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，求 $\triangle u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

解 只需求出 $u_{xx}=f''_{11}+4xf''_{12}+4xf''_{22}+2xf'_2$，然后有：
$\triangle u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}+4(x^2+y^2+z^2)f''_{22}+6f'_2$

454 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\triangle z=z_{xx}+z_{yy}$.

解 因 z^3-3xyz 关于 x,y 对称，故 $z(x,y)$ 是对称函数. 直接算出 $z_x=yz/(z^2-xy),z_{xx}=2xy^3z/(xy-z^2)^3$，由此可直接写出 $\triangle z=2xyz(x^2+y^2)/(xy-z^2)^3$.

让你解类似的问题：

455 设 $x+y+z=\ln(xy/z)(x,y,z>0)$，求 $\triangle z$.
$(=\{z[x^2+y^2+2xy(xy-x-y)]-z(1+z)^2(x^2+y^2)\}x^{-2}y^{-2}(1+z)^{-3})$.

若 $v(x,y)=v(y,x),u(x,y)=v(\varphi(x),\psi(y))$，则互换 $\varphi(x)$ 与 $\psi(y)$，$\varphi'(x)$ 与 $\psi'(y)$，即可从 u_x 得到 u_y；u_{xx} 与 u_{yy} 的关系仿此.

456 设 $e^z=z(a^x+b^y)(a,b>0)$，求 z_x,z_y.

解 $z_x=z^2e^{-z}a^x(z-1)^{-1}\ln a$；对称地 $z_y=z^2(z-1)^{-1}e^{-z}b^y\ln b$

457 设 $a^{-2}x^2+b^{-2}y^2+c^{-2}z^2=1$，求 z_{xx},z_{yy}.

解 $z_{xx}=-a^{-4}c^2z^{-3}(c^2x^2+a^2z^2)$；对称地 $z_{yy}=-b^{-4}c^2z^{-3}(c^2y^2+b^2z^2)$.

若 $u(x,y)=-u(y,x)$，则 $u_y(x,y)=-u_x(y,x)$，即交换 x,y 且改变符号从 u_x 得出 u_y. u_{xx} 与 u_{yy} 的关系仿此.

458 设 $u = e^{xy}(x-y)$，求 u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}.

解 首先算出 $u_x = e^{xy}(1 + xy - y^2)$，$u_{xx} = e^{xy}(2y + xy^2 - y^3)$；然后对称地有 $u_y = e^{xy}(x^2 - xy - 1)$，$u_{yy} = e^{xy}(x^3 - x^2y - 2x)$.

仿此你可以解下题.

459 设 $u = xy\sin(x^2 - y^2)$，求 u_{xx}, u_{yy}.

解 $u_{xx} = 6xy\cos(x^2 - y^2) - 4x^3y\sin(x^2 - y^2)$；

$u_{yy} = -6xy\cos(x^2 - y^2) + 4xy^3\sin(y^2 - x^2)$.

对 $u(\xi,\eta)$ 用变量代换 $\xi = \xi(x,y)$，$\eta = \eta(x,y)$ 时，应注意利用以下公式所具有的对称性：

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y; \quad (4.1.1)$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

实际上，你只要记住其中一半就够了. 由(4.1.2)得

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_x^2 + \xi_y^2) + 2u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) + u_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + u_\xi\triangle\xi + u_\eta\triangle\eta, \quad (4.1.3)$$

注意以上公式与 u, ξ, η 是否对称无关.

460 设 $u(x,y)$ 满足 $\triangle u = 0$，证明 $v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$，满足 $\triangle v = 0$.

证 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\xi = x/r^2$，$\eta = y/r^2$，则直接计算得 $\xi_x = r^{-2} - 2x^2r^{-4} = -\eta_y$，$\xi_y = -2xyr^{-4} = \eta_x$. 由此推出 $\xi_x^2 + \xi_y^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2$，$\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y = 0$，$\triangle\xi = \triangle\eta = 0$，于是用(4.1.3)得

$$\triangle v = (\xi_x^2 + \xi_y^2)\triangle u = 0.$$

461 设 $u \in C^2$，$v = u(x^2 - y^2, 2xy)t$，求 $\triangle v$.

解 令 $\xi = x^2 - y^2$，$\eta = 2xy$，类似于上题，利用(4.1.3)易

得 $\triangle v = 4(x^2 + y^2)(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta})$.

看以上两题时，倘你能参照题 431，那么你将体会到，这里的解法实际上融合了多种简化要素.

4.2　定积分问题

你大概已经习惯于将积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 理解为“曲边梯形”的面积(但位于 x 轴下方的那部分面积应看作负的)，下面一些涉及对称性的结论都基于这一理解.

4.2.1　奇偶性与周期性

利用变量代换 $t = -x$ 易得等式

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x. \qquad (4.2.1)$$

实际上，(4.2.1) 等价于

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x. \qquad (4.2.2)$$

由(4.2.2) 推出：当 f 为奇函数时$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；当 f 为偶函数时$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. 这些结论在直观上是如此明显，以至你几乎觉得无需证明. 但重要的是，你应随时记得使用这些结论. 例如，你能不假思索就使用以下等式吗？

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2}\cos x\mathrm{d}x = 2;$$

$$\int_{-1}^{1}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\mathrm{d}x = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\exp(-x^2)\mathrm{d}x = 0.$$

即使 f 不是奇或偶函数，只要 $f(x) + f(-x)$ 比 $f(x)$ 更

易积分，就可利用公式(4.2.2)，试看下例.

462 求 $I=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\sin x)^{-1}\mathrm{d}x$.

解 直接用(4.2.2)：

$$I=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\frac{2\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=2.$$

若 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，则对任何实数 a 有

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.2.3)$$

(4.2.3)式的意义在于：适当选取 a，或许可简化 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ 的计算，试看以下例子.

463 设 $a^2+b^2\neq 0$，证明

$$\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f(\sqrt{a+b}\sin x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\mathrm{arctg}(a/b)$，则

$$\int_0^{2\pi}f(a\cos x-b\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f(r\sin(x+\theta))\mathrm{d}x$$

$$=\int_\theta^{\theta+2\pi}f(r\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f(r\sin x)\mathrm{d}x.$$

464 求 $I=\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$.

解 用上题中的等式：

$$I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=4\sqrt{2}.$$

最后，提请你注意经常有用但易被忽略的以下公式：

$$\int_a^{a+2\pi}\sin x\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\cos x\mathrm{d}x=0.$$

4.2.2 互补性

当 $x+y=a(0\leqslant x\leqslant a)$ 时称 x 与 y 互补，利用互补的变

量代换 $y=a-x$ 易得等式

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x. \tag{4.2.4}$$

(4.2.4) 直接推出一些简单但常用的公式：

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x; \tag{4.2.5}$$

$$\int_0^1 f(x,1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(1-x,x)\mathrm{d}x. \tag{4.2.6}$$

应用(4.2.5) 的机会很多，例如，你已看到 $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x$. 一个应用(4.2.6) 的简单例子是：

465　求 $I=\int_0^1 x(1-x)^n\mathrm{d}x$.

解　显然被积函数为 $x^n(1-x)$ 时更有利，用(4.2.6)：

$$I=\int_0^1 x^n(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

容易看出，(4.2.4) 实际上等价于(参看题 983)

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a[f(x)+f(a-x)]\mathrm{d}x. \tag{4.2.7}$$

应用公式(4.2.7) 时我们寄希望于函数 $f(x)+f(a-x)$ 比 $f(x)$ 简单，在直观上这意味着曲边梯形与自身的“倒置”迭加后整合成较规则的图形，特别可能成为矩形，即 $f(x)+f(a-x)\equiv\text{const}$，下面就是一例.

466　求 $I=\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x)^{-1}\sin x\mathrm{d}x$.

解　应用(4.2.7) 立得 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

倘不用(4.2.7)，上题的计算该会如何呢？你不妨一试. 上题原不过是以下一般问题的特例：

467　求 $\int_0^a[f(x)+f(a-x)]^{-1}f(x)\mathrm{d}x(=a/2)$.

以上问题本身未必简单，但由于应用公式(4.2.7)而一举成功.类似的例子还可举出很多.

468 求 $I=\int_0^a(x-\sqrt{a^2-x^2})^{-1}\mathrm{d}x(a>0)$.

提示:令 $x=a\sin t$ 并用题 466, $I=\pi/4$.

469 求 $I=\int_0^{\pi/2}\ln \mathrm{tg}x\mathrm{d}x(=0)$.

470 求 $I=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$.

解 用(4.2.7):

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\ln\{(1+\mathrm{tg}x)[1+\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)]\}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

471 求 $I=\int_0^1(1-x^2)^{-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

提示:令 $x=\mathrm{tg}t$ 后用题 470, $I=(\pi/8)\ln 2$.

472 已知 $f(x)=-f(2-x)$,求 $I=\int_0^{\pi}f(1+\cos x)\mathrm{d}x$

提示:用公式(4.2.7), $I=0$.

如果说,指望 $f(x)+f(a-x)\equiv\mathrm{const}$ 还有点过分的话,那么要 $f(x)+f(a-x)$ 较易积分就不完全是一种奢望了,这方面令人鼓舞的例子很多.

473 求 $I=\int_0^{\pi}x(1+\cos^2x)^{-1}\sin x\mathrm{d}x$.

解 用公式(4.2.7):

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}+\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2x}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

上题中,应用(4.2.7)"整合"被积函数的结果消去了令人讨厌的因子 x.下题揭示了一般原理.

474 设 $f(a-x)=f(x)$,证明 $\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

你可能见过公式$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$，现在你看出它只是题 474 的特例.

475 求 $I = \int_0^1 [x(1-x)]^{-1/2}\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解 用(4.2.7)与公式 $\arcsin t + \arcsin\sqrt{1-t^2} = \pi/2$，

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

上题自然启示你去考虑更一般的问题：若 $f(x) = f(a-x)$，$g(x) + g(a-x) \equiv c$，如何计算$\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x$？

476 求 $I = \int_0^{\pi} \frac{q-\cos x}{1-2q\cos x + q^2}\mathrm{d}x\ (|q| \neq 1)$.

解 依然用(4.2.7)：

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{q-\cos x}{1-2q\cos x+q^2} + \frac{q+\cos x}{1+2q\cos x+q^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2q\int_0^{\pi/2} \frac{1+q^2-2\cos^2 x}{(1+q^2)^2 - 4q^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$(t = \mathrm{tg}x) \quad = 2q\int_0^{\infty} \frac{(1+q^2)(1+t^2)-2}{(1+q^2)^2(1+t^2) - 4q^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\left(a = \frac{q^2-1}{q^2+1}\right) = \frac{1}{q}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{a}{t^2+a^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\left(1 + \frac{q^2-1}{|q^2-1|}\right)$$

若 $f(a-x) = -f(x)$，则由(4.2.7)推出$\int_0^a f(x)dx = 0$(参看题 469，472)，若 $f(a-x) = f(x)$，则易证(参看题 984)

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{a/2} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.2.8)$$

(4.2.8)是对称性的典型应用之一，解题 464，476 时实际上已用到(4.2.8)(何处?)，下面是进一步的例子.

477 求 $I = \int_0^{2\pi} (2+\cos x)^{-1} \mathrm{d}x$.

解 先用(4.2.8),然后用(4.2.7):

$$I = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2+\cos x} + \frac{1}{2-\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4-\cos^2 x} = 8\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{4-\cos^2 x}$$

$$(t = \mathrm{tg}x) \qquad = 8\int_0^{\infty} \frac{dt}{4t^2+3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

478 求 $I = \int_0^{\pi} \ln\sin x \mathrm{d}x$.

解 类似于上题

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin x \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x\cos x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{I}{2} - \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

由此解出 $I = -\pi\ln 2$.

4.2.3 某些推广

与通过"反射"变换 $t=-x$ 得出公式(4.2.1)相对照,用"反演"变换 $t=x^{-1}$ 得到公式:

$$\int_{1/a}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^a x^{-2}f(x^{-1})\mathrm{d}x. \qquad (4.2.9)$$

(4.2.9)可写成如下等价形式(参考题 986):

$$\int_{1/a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^a [f(x) + x^{-2}f(x^{-1})]\mathrm{d}x \qquad (4.2.10)$$

或

$$\int_{1/a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1/a}^{a} [f(x) + x^{-2}f(x^{-1})]\mathrm{d}x \qquad (4.2.11)$$

公式(4.2.9)~(4.2.11)可与公式(4.2.1),(4.2.2)或(4.2.4),(4.2.7)对照,前者也许不及后者应用普遍,但仍可举出不少应用公式(4.2.9)~(4.2.11)的例子,其中一些是很引人的.

(4.2.11) 特别用到 $a=0$ 的情况：

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[f(x)+x^{-2}f(x^{-1})]\mathrm{d}x. \quad (4.2.12)$$

对于一定的 f，$f(x)+x^{-2}f(x^{-1})$ 比 $f(x)$ 更易积分，以下是一典型例子.

479 求 $I=\int_0^{\infty}(1+x^4)^{-1}\mathrm{d}x$（参照题 66 ~ 68）.

解 直接用(4.2.12)：

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{x^2(1+x^{-4})}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{-2}+1}{x^2+x^{-2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

有了上面的经验，对于下题你会有信心用公式(4.2.12)一试.

480 求 $I=\int_0^{\infty}(1+x^3)^{-1}\mathrm{d}x$.

提示：用(4.2.12)，$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^2-x+1)^{-1}\mathrm{d}x=2\pi/3\sqrt{3}$

进而你可用同样的方法解以下三题.

481 求 $\int_0^{\infty}x^2(x^4-x^2+1)^{-1}\mathrm{d}x \quad (=\pi/2)$.

482 求 $\int_0^{\infty}(x^2+1)^{-2}\mathrm{d}x \quad (=\pi/4)$.

483 求 $\int_0^{\infty}x(1+x^2)^{-2}\ln x\mathrm{d}x \quad (=0)$.

484 求 $I=\int_0^{\infty}x^{-2}\exp(-x^2-x^{-2})\mathrm{d}x$.

解 依然用(4.2.12)：

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(1+x^{-2})\exp(-x^2-x^{-2})\mathrm{d}x$$

$(t = x - x^{-1})$ $\quad = \frac{1}{2e^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}.$

公式(4.2.12)用于以上数题的效果想必给你以强烈印象，倘不用(4.2.12)，以上几题的计算该会如何，你不妨一试.

若 $f(x) = -x^{-2}f(x^{-1})$，则依(4.2.10)有$\int_{1/a}^{a} f(x)dx = 0$(与奇函数的情况对照)，题 483 即属这种情况. 若 $f(x) = x^{-2}f(x^{-1})$(与偶函数对照)，则有公式：

$$\begin{aligned}\int_{1/a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &= 2\int_{1/a}^{1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{1}^{a} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.2.13)\end{aligned}$$

这可与公式(4.2.8)对照，下面是一个应用(4.2.13)的例子.

485 证明$\int_0^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ln^2 x\mathrm{d}x = 2\int_0^1(1+x^2)^{-1}\ln^2 x\mathrm{d}x.$

注意到公式(4.2.2)(4.2.7)(4.2.11)在功能上的类似性之后，你自然会提出这样的问题：它们能否统一在一个一般的公式中呢?那么请解下题：

486 设 $\varphi(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 是严格减的连续可微函数，$\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$；$f \in C[a,b]$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b[f(x) - \varphi'(x)f(\varphi(x))]\mathrm{d}x. \qquad (4.2.14)$$

分别取 $\varphi(x) = -x, \varphi(x) = a - x$ 与 $\varphi(x) = x^{-1}$，就从(4.2.14)得出公式(4.2.2)，(4.2.7)与(4.2.11). 当然，$\varphi(x)$ 还有其它选择，如取 $\varphi(x) = x^{-n}$ 或 $\varphi(x) = \sqrt{a - x}$，等等.

487 求 $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x (a > 0)$.

解 取 $\varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$，用(4.2.14)：

$$I=\frac{1}{2}\int_0^a\left(\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}.$$

设 φ 如题 486，则有难一的 $c\in(a,b)$：$\varphi(c)=c$. 实际上，(4.2.14) 等价于(对照(4.2.1)(4.2.9))

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=-\int_c^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

若 $f(x)=-\varphi'(x)f(\varphi(x))$，则 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$，此时可以说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 c 有某种对称性；若 $f(x)=\varphi'(x)f(\varphi(x))$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，$f(x)$ 关于 c"反对称".

4.3 重积分问题

4.3.1 二重积分

对于积分 $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，直接凭几何观察你就能确信以下结论：

(i) 若 D 关于 y 轴对称，则当 $f(x,y)\equiv-f(-x,y)$ 时 $I=0$，而当 $f(x,y)\equiv f(-x,y)$ 时

$$I=2\iint_{(x,y)\in D,x\geqslant 0}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{4.3.1}$$

当 D 关于 x 轴对称时有类似结论.

(ii) 若 D 关于 x,y 轴皆对称，$f(-x,y)\equiv f(x,y)\equiv f(x,-y)$，$D^+=\{(x,y)\in D: x,y\geqslant 0\}$，则

$$I=4\iint_{D^+}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{4.3.2}$$

(iii) 若 D 关于 x 轴、y 轴及直线 $y=x$ 皆对称，$f(-x,y)\equiv$

$f(x,y)\equiv f(y,x)\equiv f(x,-y)$，$E=\{(x,y)\in D: 0\leqslant y\leqslant x\}$，则

$$I=8\iint\limits_{E}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.3.3}$$

(iv) 若 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.3.4}$$

488 求 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|-|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 先用(4.3.4)(取 $f(x,y)=|x|$)，再用(4.3.2)：

$$I=8\iint\limits_{x+y\leqslant 1,x,y\geqslant 0}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}.$$

489 求 $I=\iint\limits_{x^2-y^2\leqslant a^2}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

提示：用(4.3.3) 并用极坐标，$I=a^4/2$.

490 求 $I=\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y=x^2$，$y=4x^2$，$y=1$ 围成.

解 $I=\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}.$

若对称轴非坐标轴，可考虑适当坐标变换.

491 求 $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^2+y^2\leqslant x-2y$.

解 以 G：$x^2+y^2\leqslant 5/4$ 代 D，并注意$\iint\limits_{G}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$：

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{G}[(x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{G}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi\left(\frac{5}{4}\right)^2\end{aligned}$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{5}/2} r^3 \mathrm{d}r + \frac{25\pi}{16} = \frac{75\pi}{32}.$$

492 求 $I = \iint\limits_D (x-y)^2 \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是以 $(\pi,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(2\pi,\pi)$ 为顶点的四边形.

解 注意 D 可描述为 $|x-y| \leqslant \pi$, $|x-y-2\pi| \leqslant \pi$, 而 u^2 与 $\sin v$ 分别为偶函数与奇函数, 因此 $I = 0$.

493 求 $I = \iint\limits_D |\cos(x+y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D: 0 \leqslant x, y \leqslant \pi/2$.

解 只需考虑由 $x+y=\pi/2$ 隔开的一半积分域:

$$I = 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y = \pi - 2.$$

494 求 $I = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D: a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 \leqslant 1$.

解 用代换 $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$:

$$\iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a^3 b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{a^3 b\pi}{4}.$$

由对称性可断定 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab^3\pi/4$, 于是 $I = ab\pi(a^2+b^2)/4$

4.3.2 三重积分

有了上段的经验之后, 你应能悟出在三重积分计算中如何利用对称性, 甚至能写出与(4.3.1)~(4.3.4)相当的三重积分公式, 我们不拟细列这些公式, 只要通过实例说明那些最重要的方法.

495 求 $I = \iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}v$, $V: 0 \leqslant x+y+z \leqslant 1$, $x, y, z \geqslant 0$.

解 因 V 关于 x, y, z 对称, 故(参照(4.3.4))

$$I=3\iiint_V z\mathrm{d}v=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z=\frac{1}{8}.$$

一般地，若 V 关于 x,y,z 对称，则

$$\iiint_V[f(x)+f(y)+f(z)]\mathrm{d}v=3\iiint_V f(z)\mathrm{d}v. \tag{4.3.5}$$

至于(4.3.5)中两积分哪个更好计算，则应依具体情况决定.

496 求 $I=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,V:x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$.

解 将 V 平移到 $B:x^2+y^2+z^2\leqslant 3/4$，有

$$\begin{aligned}I&=\iiint_B\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}v\\&=\iiint_B(x^2+y^2+z^2)dv+\frac{3}{4}\iiint_B\mathrm{d}v\\&=2\pi\int_0^\pi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{3}/2}r^4\mathrm{d}r+\frac{3}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}\pi}{5},\end{aligned}$$

其中用到 $\iiint_B(x+y+z)\mathrm{d}v=0$.

497 求 $I=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,V:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$

解 将椭球 V 变为球 $B:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，这意味着分别以 ax,by,cz 代 x,y,z，得

$$\begin{aligned}\iiint_V z^2\mathrm{d}v&=abc^3\iiint_B z^2\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{3}abc^3\iiint_B(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\frac{4\pi}{15}abc^3,\end{aligned}$$

最后一步计算如同题 496，由对称性可得出 $\iiint_V x^2\mathrm{d}v$ 与 $\iiint_V y^2\mathrm{d}v$

的类似表达式(参照题 494),合并起来得 $I = 4\pi abc(a^2 + b^2 + c^2)/15$.

上题计算中使用了几种典型的简化技巧:以 $\iiint\limits_V z^2 \mathrm{d}v$ 取代原积分;以球 B 取代椭球 V;以 $\iiint\limits_B (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}v$ 取代 $\iiint\limits_B z^2 \mathrm{d}v$(依(4.3.5)式),这些简化技巧在不同形式下被普遍使用,例如,可用于解题 497 的以下推广:

498 求 $I = \iiint\limits_V (Ax^{2m} + By^{2n} + Cz^{2p})\mathrm{d}v$,$V$ 同上题.

解 设 B 依题 497 之解,则

$$\iiint\limits_V z^{2p}\mathrm{d}v = abc^{2p+1}\iiint\limits_B z^{2p}\mathrm{d}v$$

(用球坐标)

$$= 4\pi abc^{2p+1}/[(2p+1)(2p+3)],$$

据此即可按题 497 的思路直接写出

$$I = 4\pi abc\left[\frac{Aa^{2m}}{(2m+1)(2m+3)} + \frac{Bb^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{Cc^{2p+1}}{(2p+1)(2p+3)}\right]$$

499 求 $I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v$,$V$ 同上题.

提示:用题 497 的方法,或直接用上题结论,$I = 4\pi abc/5$

4.4 曲线积分问题

4.4.1 第一类曲线积分

对于平面曲线积分 $I = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s$,有与二重积分相近的对称性结论(参照 4.3.1):

(i) 若 L 关于 y 轴对称，$f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $I=0$；若 $f(-x,y)=f(x,y)$，则成立

$$I=2\int_{L(x\geqslant 0)}f(x,y)\mathrm{d}s \tag{4.4.1}$$

(ii) 若 L 关于 x,y 轴皆对称，$f(-x,y)\equiv f(x,y)\equiv f(x,-y)$，$L_+=\{(x,y)\in L:x,y\geqslant 0\}$，则

$$I=4\int_{L_+}f(x,y)\mathrm{d}s \tag{4.4.2}$$

(iii) 若 L 关于 x,y 轴及直线 $y=x$ 皆对称，$f(-x,y)\equiv f(x,y)\equiv f(y,x)\equiv f(x,-y)$，则

$$I=8\int_{(x,y)\in L,0\leqslant y\leqslant x}f(x,y)\mathrm{d}s \tag{4.4.3}$$

(iv) 若 L 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_L[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}s. \tag{4.4.4}$$

对于空间曲线积分 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$，你应当能写出与(4.4.1)～(4.4.4)对应的公式.

500 求 $I=\int_L|y|\mathrm{d}s$，$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解 用极坐标：$r^2=a^2\cos 2\theta$，$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2}=a^2r^{-1}\mathrm{d}\theta$，于是由(4.4.2)有

$$I=4\int_{L_+}y\mathrm{d}s=4\int_0^{\pi/4}r\sin\theta\cdot a^2r^{-1}\mathrm{d}\theta=(4-2\sqrt{2})a^2.$$

注意上述积分中不必代入 $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$.

501 求 $I=\int_L(x^{4/3}+y^{4/3})\mathrm{d}s$，$L:x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$，$a>0$.

解 设 $x=a\cos^3t$，$y=a\sin^3t$，则 $\mathrm{d}s=3a|\sin t\cos t|\mathrm{d}t$. 首先用(4.4.4)，然后用(4.4.2)，知有

$$I = 8\int_{L_1} y^{4/3}\mathrm{d}s = 24a^{7/3}\int_0^{\pi/2}\sin^5 t\cos t\mathrm{d}t = 4a^{7/3}.$$

上题中用到公式(4.4.4)的如下特殊情况：

$$\int_L [f(x) - f(y)]\mathrm{d}s = 2\int_L f(y)\mathrm{d}s, \qquad (4.4.5)$$

其中L关于x,y对称(参照(4.3.5). 不要以为(4.4.5)右端一定比左端简单，下面的例子给出公式(4.4.5)的一个"反向"应用.

502 求$I = \int_L x^2\mathrm{d}s, L: x^2 + y^2 = a^2$.

解 反向用(4.4.5)得

$$I = \frac{1}{2}\int_L (x^2 + y^2)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L a^2\mathrm{d}s = \pi a^3.$$

此处应用(4.4.5)的结果使积分自动得出，当然没有比这更理想的了. 一般地，只要在L上$f(x) + f(y) \equiv \mathrm{const}$，就宜于用(4.4.5)(参照题466).

503 求$I = \int_L x^2\mathrm{d}s, L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$

解 用(4.4.5)的一个三维推广：

$$I = \frac{1}{3}\int_L (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

4.4.2 第二型平面曲线积分

对于积分$I = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，直接由几何观察可得出以下对称性结论：

(i) 设L关于y轴对称. 若$P(-x,y) \equiv -P(x,y)$，则$I = 0$；若$P(-x,y) \equiv P(x,y)$，则$I = 2\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x$，其中$L_1 = \{(x,y) \in L: x \geqslant 0\}$.

(ii) 设L关于x轴对称. 若$P(x,-y) \equiv P(x,y)$，则$I = 0$；若$P(x,-y) \equiv -P(x,y)$，则$I = 2\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x$，此处$L_1 =$

$\{(x,y)\in L: y\geqslant 0\}$.

你不妨写出关于$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$的类似结论.

504 求$I=\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$, L: $y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 因L关于y轴对称,故由结论(i)(ii)有$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_L y^2\mathrm{d}y=0$,于是

$$I=2\int_0^1 (x^2-4x^4)\mathrm{d}x=-14/15.$$

505 求$I=\int_L (xe^y+y)\mathrm{d}x+[y\ln(x^2+1)+x]\mathrm{d}y$, L: $x^2+y^2=4$上沿顺时针方向从$(-\sqrt{3},-1)$到$(\sqrt{3},-1)$的一段.

解 因L关于y轴对称,故$\int_L xe^y\mathrm{d}x=0=\int_L y\ln(x^2+1)\mathrm{d}y$,于是

$$I=\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=xy\Big|_{(-\sqrt{3},-1)}^{(\sqrt{3},-1)}=-2\sqrt{3}.$$

506 求$I=\int_L (|x|+|y|)^{-1}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$, L: $|x|+|y|=1$ $(I=0)$.

4.4.3 第二型空间曲线积分

对于积分$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x$,有如下结论:

(i) 设L关于xy平面对称.若$P(x,y,-z)\equiv P(x,y,z)$,则$I=0$;若$P(x,y,-z)\equiv -P(x,y,z)$,则$I=2\int_{L(z\geqslant 0)} P(x,y,z)\mathrm{d}x$.

(ii) 设L关于yz平面对称.若$P(-x,y,z)\equiv -P(x,y,

z),则 $I=0$;若 $P(-x,y,z)\equiv P(x,y,z)$,则 $I=2\int_{L(x\geq 0)}P(x,y,z)\mathrm{d}x$.

(iii) 设 L 关于 zx 平面对称. 若 $P(x,-y,z)\equiv P(x,y,z)$,则 $I=0$;若 $P(x,-y,z)\equiv -P(x,y,z)$,则 $I=2\int_{L(y\geq 0)}P(x,y,z)\mathrm{d}x$

对于 $\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y$, $\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 有类似结论. 你无需记住这些结论,只需在每种情况下能通过图形的直观考察迅速得出所要结论.

507 求 $I=\int_L y^2dx+z^2dy-x^2\mathrm{d}z$, L: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$,从 x 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 因 L 关于 xz 平面对称,故由结论(i)(ii)(iii)有 $\int_L y^2\mathrm{d}x=\int_L x^2\mathrm{d}z=0$,于是

$$I=\int_L z^2\mathrm{d}y=\int_L(a^2-ax)\mathrm{d}y=-a\int_L x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_{x^2+y^2=ax}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{Green 公式}}-a\iint_{x^2+y^2\leq ax}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi a^3}{4}.$$

以上计算中用了三个转化步骤:a) 由 L 的方程引出代换 $z^2=a^2-ax$;b) 化 $\int_L x\mathrm{d}y$ 为 $\int_{L_{xy}}x\mathrm{d}y$, L_{xy} 是 L 在 xy 平面的投影(以下将多次使用类似记号);c) 用 Green 公式. 这些步骤下面将反复使用.

508 求 $I=\int_L(x^2+z)\mathrm{d}x+(y^2+x)\mathrm{d}y+(z^2+y)\mathrm{d}z$, L: $x^2+y^2+z^2=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$,从 z 轴正向看去 L 为反时针方向.

解　首先有$\int_L(x^2\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z)=0$(参考1.4.2).因$L$关于$xz$平面及$yz$平面对称,故$\int_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=0$,于是

$$I=\int_L x\mathrm{d}y=\int_{L_{xy}}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

509　求$I=\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$, L:$x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2ax(z>0,0<a<R)$,从$z$轴正向看去$L$为反时针方向.

解　由L关于xz平面对称有$\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=0$,

$$I=\int_L(z^2+x^2)\mathrm{d}y=\int_L(2Rx-y^2)\mathrm{d}y=2R\int_L x\mathrm{d}y$$
$$=2R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi a^2R.$$

此题亦可用更简单的以下方法解:

$$I=I+\int_L x^2\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z=\int_L(x^2+y^2+z^2)d(x+y+z)$$
$$=2R\int_L x\mathrm{d}(x+y+z)=2R\int_L x\mathrm{d}y=2\pi a^2R.$$

510　求$I=\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z, L$:$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$,从$x$轴正向看去$L$为反时针方向.

解　由对称性可断定$I=3\int_L y\mathrm{d}x$,于是

$$I=3\int_{L_{xy}}y\mathrm{d}x=-3\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3S,$$

其中D是L_{xy}所围区域,S是D之面积.因L所围面积为πa^2,而平面$x+y+z=0$法矢与z轴夹角余弦为$1/\sqrt{3}$,故$S=\pi a^2/\sqrt{3}$,因此$I=-\sqrt{3}\pi a^2$.

上题中看出 $I = 3\int_L y\mathrm{d}x$ 是一种重要的对称性观察，类似的观察在本章多处用到.

511　求 $I=\int_L xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z, L: z = x^2 + y^2, z = y$.

解　$\int_L z^2\mathrm{d}z = 0$，由对称性 $\int_L xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$，故 $I = 0$.

512　求 $I=\int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，$L$ 是以 $(a,0,0)$，$(0,a,0)$ 与 $(0,0,a)$ 为顶点的三角形回路.

解　$I = 3\int_L y\mathrm{d}x = 3\int_a^0 (a - x)\mathrm{d}x = -\dfrac{3a^2}{2}$.

513　求 $I=\int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 是球面块 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,(x,y \geqslant 0)$ 之边界，沿 L 正向行进时曲面外侧在左.

解　设 L_1 是 L 在 xy 平面上的一段，则

$$I = 3\int_{L_1} y^2\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y = -6\iint_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -12\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\quad(D: x^2 - y^2 \leqslant 1, x, y \geqslant 0)$$

514　求 $I=\int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 是立体 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 之表面与平面 $x + y + z = 3/2$ 之交线，从 z 轴正向看去 L 为反时针方向.

解　类似于题 510，

$$I = 3\int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x = 3\int_{L_{xy}} \left[y^2 - \left(\frac{3}{2} - x - y\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= 3\iint_D (2x - 3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{9}{2},$$

其中 D 为 L_{xy} 所围之区域.

4.5　曲面积分问题

4.5.1　第一类曲面积分

对于积分$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，以下对称性结论可参照 4.3.1 或 4.4.1 的相应结论来理解.

(i) 设 S 关于 xy 平面对称. 若 $f(x,y,-z)\equiv -f(x,y,z)$，则 $I=0$；若 $f(x,y,-z)\equiv f(x,y,z)$，则

$$I=2\iint\limits_{S(z\geqslant 0)} f(x,y,z)\mathrm{d}S. \tag{4.5.1}$$

当 S 关于 xz 平面或 yz 平面对称时有类似结论.

(ii) 若 S 关于 x,y,z 对称，则(参照(4.4.4))

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{S} f(y,z,x)\mathrm{d}S = \iint\limits_{S} f(z,x,y)\mathrm{d}S. \\ &= \frac{1}{3}\iint\limits_{S}[f(x,y,z) - f(y,z,x) + f(z,x,y)]\mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

特别(参照(4.3.5),(4.4.5))，

$$\iint\limits_{S}\varphi(x)\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint\limits_{S}[\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(y)]\mathrm{d}S. \tag{4.5.3}$$

515　求 $I=\iint\limits_{S}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$S: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (x^2+y^2\leqslant 2ax)$.

解　因 S 关于 xz 平面对称，故$\iint\limits_{S}(xy+yz)\mathrm{d}S=0$. 对于锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 有 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$(不妨记住!)，于是

$$I = \iint_S xz\mathrm{d}S = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2\leqslant 2ax} x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（用极坐标） $$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^3\mathrm{d}r = \frac{16\sqrt{2}a^4}{15}.$$

516 求 $I = \iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S: z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$

解 由对称性有 $\iint_S (x+y)\mathrm{d}S = 0$，于是

$$I = \iint_S z\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} a\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^3.$$

上面用到关于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的标准结论：$|z|\mathrm{d}S = a\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，你应熟记此公式，推导很简单：由 $x+zz_x=0=y+zz_y$ 得

$$a\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= |z|\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |z|\mathrm{d}S$$

517 求 $I = \iint_S xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S$，$S: x^2+y^2+z^2=a^2(x,y,z\geqslant 0)$.

解 因 S 关于 x,y,z 对称，故用(4.5.2)：

$$I = 3\iint_S x^3y^3z\mathrm{d}S = 3a\iint_D x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（用极坐标） $$= 3a\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^3\mathrm{d}\theta\int_0^a r^7\mathrm{d}r = \frac{a^9}{32},$$

其中 D 是 S 在 xy 平面上的投影.

518 求 $I = \iint_S x^2\mathrm{d}S$，$S: z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

解 观察此题，你会自然联想到题 502，不过，要能用公式(4.5.3)，须以 $B: x^2+y^2+z^2=a^2$ 代 S：

$$I = \frac{1}{2}\iint_B x^2 dS = \frac{1}{6}\iint_B (x^2 + y^2 + z^2) dS$$
$$= \frac{1}{6}\iint_B a^2 dS = \frac{2\pi a^4}{3}.$$

现在，综合题 497，502，503，518，你对于这一套互相关联的方法应当已有系统的印象．如果你能运用自如，对付以下问题就会轻而易举．

519 求 $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$，$S : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(I = 4\pi a^4/3)$．

4.5.2 第二类曲面积分

对于积分 $I = \iint_S P(x,y,z) dydz$ 有以下对称性结论：

(i) 设 S 关于 yz 平面对称．若 $P(-x,y,z) \equiv P(x,y,z)$，则 $I = 0$；若 $P(-x,y,z) \equiv -P(x,y,z)$，则

$$I = 2\iint_{S(x\geqslant 0)} P(x,y,z) dydz. \tag{4.5.4}$$

对于积分 $\iint_S Q(x,y,z) dzdx$ 与 $\iint_S R(x,y,z) dxdy$ 有类似结论．

(ii) 若 S 关于 x,y,z 对称，则

$$I = \iint_S P(z,x,y) dxdy = \iint_S P(y,z,x) dzdx$$
$$= \frac{1}{3}\iint_S P(x,y,z) dydz + P(y,z,x) dzdx + P(z,x,y) dxdy \tag{4.5.5}$$

(4.5.5) 的一个特殊情况是(参照题 510)：

$$\iint_S f(x) dydz + f(y) dzdx + f(z) dxdy = 3\iint_S f(z) dxdy. \tag{4.5.6}$$

520 求 $I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为曲面 $z^2=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 之上侧.

解 因 S 关于 yz 平面对称，故由结论(i)有 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$；同理 $\iint\limits_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，于是

$$I=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi h^4}{2}.$$

521 求 $I=\iint\limits_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 同上题.

解 如同上题一样由对称性得出

$$\iint\limits_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0,$$

于是

$$I=\iint\limits_S(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

522 求 $I=\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是球面块 $x^2+y^2+z^2=1(x,y,z\geqslant 0)$ 之外侧.

解 用公式(4.5.5)：

$$I=3\iint\limits_S zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint\limits_D x\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(用极坐标) $$=3\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{16},$$

其中 D 是 S 在 xy 平面上的投影.

523 求 $I=\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为 $x+y+$

$z = 1(x, y, z \geqslant 0)$ 的朝向原点的一侧.

解 用(4.5.5):

$$I = 3\iint_S zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -3\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1 - x - y)\mathrm{d}y = -\frac{1}{8}.$$

524 求 $I = \iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 同题 522.

解 用公式(4.5.6):

$$I = 3\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2}\int_0^1(1 - r^2)r\mathrm{d}r = \frac{3\pi}{8}.$$

4.6 其它问题

下面是应用对称性的几个零散例子.

525 设 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant R$, 求点 (a, b, c) 到球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 内的点的平均距离 d.

解 由球的对称性, 不妨设 $a = b = 0, c > 0$, 于是

$$d = \left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^{-1}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}\mathrm{d}v$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi\sqrt{r^2 - 2prc\cos\varphi + c^2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= c + (R^2/5c).$$

526 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $x^2 + z^2 = a^2$ 所围立体之体积 V 与表面积 S.

解 由对称性, 只需考虑在第一卦限中的 1/8:

$$V = 8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z = \frac{16a^3}{3};$$

$$S = 16\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\mathrm{d}y = 16a^2.$$

527 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2(x,y,z\geqslant 0)$ 围线 L 之重心.

解 设 L 在 xy 平面上的一段 L_1 的重心是 $(\bar{x},\bar{y},0)$,则

$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{2}{\pi a}\int_{L_1}x\mathrm{d}s=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi/2}a\cos\theta\cdot a\mathrm{d}\theta=\frac{2a}{\pi},$$

因此 L_1 的重心为 $(2a/\pi,2a/\pi,0)$. 由对称性,L 在 yz 平面及 xz 平面上的部分的重心分别为 $(0,2a/\pi,2a/\pi)$ 与 $(2a/\pi,0,2a/\pi)$,于是所求的重心是 $(4a/3\pi,4a/3\pi,4a/3\pi)$.

528 求 $V:a^{-2}x^2+b^{-2}y^2+c^{-2}z^2\leqslant 1(x,y,z\geqslant 0)$ 之重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

解 令 $x=ar\cos\theta\sin\varphi,y=br\sin\theta\sin\varphi,z=cr\cos\varphi$,则

$$\iiint_V z\mathrm{d}v=abc^2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{abc^2\pi}{16},$$

于是
$$\bar{z}=\frac{abc^2\pi}{16}\left(\frac{abc\pi}{6}\right)^{-1}=\frac{3c}{8}.$$

由对称性有 $\bar{x}=3a/8,\bar{y}=3b/8$.

529 求圆的最大面积内接三角形.

解 不妨设圆半径为 1、内接三角形三边所对圆心角为 x、y、z,则 $x+y+z=2\pi$,三角形面积 $S=2^{-1}(\sin x+\sin y+\sin z)$,于是问题归于求解

$$\max(\sin x+\sin y+\sin z),x+y+z=2\pi.$$

令 $L=\sin x+\sin y+\sin z+\lambda(x+y+z)$,考虑到对称性,使 $\mathrm{d}L=0$ 的点 (x,y,z) 必定是 $x=y=z=2\pi/3$.

530 解方程组 $2x_i+\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}x_j=n,i=1,2,\cdots,n$.

解 此方程组关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 对称,因此可断定 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 由此易解出 $x_i=n/(n+1),(1\leqslant i\leqslant n)$.

第五章　转化原则

顾名思义，所谓转化，就是将求解的问题化成另一个问题，后者在形式上与求解的难易上都可能很不相同．通过转化而获得解决问题的途径，那正是数学家最擅长的事；因此，“转化”在数学中被推崇为最重要的原则之一，且被广泛地——有时是标准地，有时则巧妙地应用．如果你遇到一道难题而百思不得其解，那么就请你转化它吧！——这或许是你从解题艺术中应记住的主要格言．

应用转化原则的两种形式是：

(1)判断问题．若 P，Q 是互相等价的命题，则判定 P 可转化为判定 Q，反之亦然．

(2)计算问题．若 A，B 是两个相等的量，则计算 A 可转化为计算 B，反之亦然．

以上两类转化都是可逆的．但在具体运用时往往忽略其中某个方向的转化，本章恰好要对那些通常被忽略的转化给以更多的强调．

5.1　序列极限与函数极限

大多数微积分教材先讲序列极限，后讲函数极限，这似乎是认定序列极限比函数极限简单，但对于极限的具体计算，你可能很难回答两种极限计算哪个更容易．序列似乎结构简单些，因而

其极限较易描述;而计算函数极限时有一些强有力的工具可用(如 L'Hospital 法则与 Taylor 公式). 本节正是要强调序列极限可转化为函数极限,并用实例说明这种转化有时非常有效.

本节所述的转化基于以下原理:若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在($-\infty\leqslant a\leqslant\infty$),则对任何趋于 a 的序列 $\{x_n\}$ ($x_n\neq a$),有

$$\lim_n f(x_n)=\lim_{x\to a}f(x). \tag{5.1.1}$$

设已给序列 $\{a_n\}$,要求 $\lim\limits_n a_n$,则首先应形成一适当的表达式 $a_n=f(x_n)$,然后应用等式(5.1.1).

531 求 $l=\lim\limits_n[(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})/2]^n\quad(a,b>0)$.

解 $n\to\infty$ 相当于 $x_n=n^{-1}\to0$,于是

$$\begin{aligned}l&=\lim_{x\to0}\left[\frac{a^x+b^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\exp\{x^{-1}[\ln(a^x+b^x)-\ln2]\}\\&=\exp\{\lim_{x\to0}x^{-1}[\ln(a^x+b^x)-\ln2]\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}\right\}=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

以上计算实际上已用到$[(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})/2]^n=f(n^{-1})$,$f(x)=[(a^x+b^x)/2]^{1/x}$.但这一点只是寓于计算中,而不必明确写出.仿照上题,你自己可解更一般的

532 设 $a_1,\cdots,a_m>0$, 求 $\lim\limits_n\left\{\sum\sqrt[n]{a_i}/m\right\}^n\quad(=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m})$.

533 求 $l=\lim\limits_n[(\sqrt[n]{64}+2)/3]^{2n-1}$.

解 首先取对数,然后以 x^{-1} 代 n:

$$\ln l=\lim_n(2n-1)[\ln(\sqrt[n]{64}+2)-\ln3]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-1\right)[\ln(64^x+2)-\ln 3]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{64^x\ln 64}{64^x+2}\Big/\frac{2}{(2-x)^2} = \ln 16,$$

因此 $l = 16$.

由你来解类似的问题：

534 求$\lim_n[(\sqrt[n]{b}+a-1)/a]^n$, $a,b>0$ $(=\sqrt[a]{b})$.

535 求$\lim_n(2\sqrt[n]{e}-1)^n\sqrt[n]{2e^n-1}$ $(=e^3)$.

536 求 $l=\lim_n[\cos(x/\sqrt{n})]^n$.

解 取对数并以 t 代 $1/\sqrt{n}$：

$$\ln l = \lim_n n\ln\cos\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{t\to 0} t^{-2}\ln\cos xt$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-x\sin tx}{2t\cos tx} = -\frac{x^2}{2},$$

因此 $l=\exp(-x^2/2)$.

类似的问题是：

537 求$\lim_n\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sqrt{n}}\Big/\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)^n$ $(=e^{\pi^2})$.

538 求 $l=\lim_n[(n\sqrt[n]{a}-\ln a)/(n\sqrt[n]{b}-\ln b)]^{n^2}$ $(a,b>0)$.

解 此题可分两步计算：

$$\lim_n n^2\ln\left(\sqrt[n]{a}-\frac{\ln a}{n}\right) = \lim_{x\to 0} x^{-2}\ln(a^x - x\ln a)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)\ln a}{2x(a^x-x\ln a)} = \frac{\ln^2 a}{2};$$

同理

$$\lim_n n^2\ln\left(\sqrt[n]{b}-\frac{\ln b}{n}\right) = \frac{\ln^2 b}{2}.$$

于是 $\ln l = 2^{-1}(\ln^2 a - \ln^2 b)$, $l=\exp[2^{-1}(\ln^2 a-\ln^2 b)]$.

5.2 序列问题与级数问题

如上节中指出的，序列概念通常被认为比较简单，且常当作极限论的出发点. 而无穷级数则似乎复杂些，它在微积分学教材中排得较后. 这一看法实际上并不正确，正是这一看法妨碍了序列与级数的相互转化. 本节要指出，级数概念与序列概念实质上互相等价. 事实上，设 $x_1 = a_1, x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n (n \geqslant 1)$，则序列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum_1^\infty a_n$ 收敛，当二者收敛时 $\lim\limits_n x_n = \sum_1^\infty a_n$. 因此，判定 x_n 收敛与求 $\lim\limits_n x_n$ 的问题可转化为判定 $\sum a_n$ 收敛与求和 $S = \sum_1^\infty a_n$，反之亦然. 将级数的收敛问题与求和问题转化为其部分和序列的收敛问题是自然且熟知的，而相反的转化则容易被忽略，本节主要强调后者，这种转化可按照一些完全标准的步骤进行：

(i) 形成序列问题，即将原问题归结为某个序列 $\{x_n\}$ 的收敛问题.

(ii) 转化为级数问题：令 $a_n = x_n - x_{n-1} (n > 1), a_1 = x_1$，则 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum a_n$ 收敛.

(iii) 判定级数收敛.

5.2.1 收敛性问题

539 设 $f(x)$ 是单调减的非负函数，$x_n = \sum_1^n f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证 令 $a_n = x_n - x_{n-1}$，则由 $f(x)$ 单调减推出

$$0 \geqslant a_n = f(n) - \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(n) - f(n-1). \tag{5.2.1}$$

由 $\lim_n f(n)$ 存在并有限推出 $\sum[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，于是由 (5.2.1) 及比较判别法知 $\sum a_n$ 收敛，从而 $\{x_n\}$ 收敛.

注意上述证明中用到两种相反的转化：由序列 $\{f(n)\}$ 收敛推出级数 $\sum[f(n)-f(n-1)]$ 与 $\sum a_n$ 收敛；由 $\sum a_n$ 收敛推出序列 $\{x_n\}$ 收敛.

540 设 $a_n>0$，证明级数 $\sum a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum a_n\sqrt{2}\sqrt{5}\cdots\sqrt{n^2+1}e^n n^{-n-1/2}$ 收敛.

证 由比较判别法，只要证 $y_n=\sqrt{2.5\cdots(n^2+1)}e^n n^{-n-1/2}$ 收敛于一正数；后者又归于证 $x_n=\ln y_n$ 收敛. 因

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}&=\ln\frac{y_n}{y_{n-1}}\\&=\ln[\sqrt{n^2+1}en^{-n-1/2}(n-1)^{n-1/n}]\\&=\frac{1}{2}\ln(n^2+1)+1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n\\&\quad+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n-1)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\&=O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

故 $\sum(x_n-x_{n-1})$ 收敛，从而 $\{x_n\}$ 收敛.

以上证法是很典型的：为证 $\sum a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\sum b_n$ 收敛 $(a_n,b_n>0)$，只需证 $l=\lim_n b_n/a_n$ 存在且 $0<l<\infty$；而证后者又归于证 $x_n=\ln(b_n/a_n)$ 收敛；进而归于证 $\sum(x_n-x_{n-1})$ 收敛. 这就相继运用了三次转化. 下面你自己解两题以便细加体会.

541 设 $\alpha>-1$，$a_n>0$. 证明级数 $\sum a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum a_n(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)e^n n^{-n-\alpha-1/2}$ 收敛.

542 设 $a_n > 0$，证明级数 $\sum a_n/[(\sqrt{1}+1)(\sqrt{2}+1)\cdots(\sqrt{n}+1)]$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum a_n e^{n/2-2\sqrt{n}} n^{1/4-n/2}$ 收敛.

几乎所有级数收敛判别方法都依赖于某个相关序列（级数问题转化为序列问题）. 例如，用比值法判定 $\sum a_n$ 收敛归于计算极限 $\lim\limits_{n} a_{n+1}/a_n$；用 Leibniz 判别法判定 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛归于验证 a_n 单调收敛于 0，而后者又归于验证 $\sum \ln(a_{n+1}/a_n) = -\infty$，这样，判定 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛转化成了判定级数 $\sum \ln(a_{n+1}/a_n)$ 发散（参考 2.6.4）.

543 判定级数 $\sum(-1)^n n^n e^{-n}/n!$ 之敛散性.

解 令 $a_n = n^n e^{-n}/n!$，则

$$\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

由此知 $\sum \ln(a_{n+1}/a_n) = -\infty$（注意 $\sum n^{-1} = \infty$！），因此级数 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛.

仿此，你可以解类似的问题：

544 设 $p > 0$，判定级数 $\sum(-1)^n[(2n-1)!!/(2n)!!]^p$ 的敛散性. （收敛）

545 设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n}\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) = p > 0$，证明级数 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛.

证 令 $n[(a_n/a_{n-1}) - 1] = p + \varepsilon_n$，则 $\varepsilon_n \to 0\ (n\to\infty)$，

$$-\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln\left(1+\frac{p+\varepsilon_n}{n}\right) = \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

由此推出 $\sum \ln(a_{n+1}/a_n) = -\infty$，因此 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛.

在某些情况下，“$a_n \to 0$”可由级数 $\sum a_n$ 收敛推出，如 $a^n/n! \to 0$ 是一平凡例子. 亦可举出一些不那么平凡的例子.

546 设 $a_n = n!/(2n-1)!!$,证明 $a_n \to 0(n\to\infty)$.

证 因 $a_{n+1}/a_n = (n+1)/(2n+1) \to 1/2$,故由比值法知 $\sum a_n$ 收敛,从而 $a_n \to 0$.

类似地你可解下题.

547 证明$\lim\limits_n n^{-n}(2n)!! = 0$.

最后举一个用级数研究递归序列的例子.

548 给定 a_0, a_1,令 $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}(n\geqslant 2, 0 < p = 1 - q < 1)$,求 $l = \lim\limits_n a_n$.

解 $l = a_0 + \sum_1^\infty (a_n - a_{n-1})$.因

$$a_n - a_{n-1} = -q(a_{n-1} - a_{n-2}) = \cdots = (-q)^{n-1}(a_1 - a_0),$$

故 $$l = a_0 + (a_1 - a_0)\sum_1^\infty (-q)^{n-1} = \frac{qa_0 + a_1)}{(1+q)}.$$

5.2.2 渐近公式

本节中C记某个常数.首先考虑形如$A_n \approx B_n + C$的渐近公式,它等价于 $A_n - B_n \to C$ 或 $A_n = B_n + C + \varepsilon_n, \varepsilon_n \to 0$.令 $x_n = A_n - B_n$,则渐近公式 $A_n \approx B_n + C$ 存在 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum (x_n - x_{n-1})$ 收敛,因此正好可用上段中已充分阐明的方法.

549 证明当 n 充分大时 $\sum_1^n k^{-1} \approx \ln n + C$.

证 令 $x_n = \sum_1^n k^{-1} - \ln n$,则

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因此$\sum (x_n - x_{n-1})$ 收敛,从而$\{x_n\}$ 收敛于某常数 C.

注 本题亦可从题 539 推出(取 $f(x) = 1/x$)

550 证明当 n 充分大时 $\sum_2^n (k\ln k)^{-1} \approx \ln\ln n + C$.

证 令 $x_n = \sum_2^n (k\ln k)^{-1} - \ln\ln n$,则

$$|x_n - x_{n-1}| = \left|\frac{1}{n\ln n} - \ln\ln n + \ln\ln(n-1)\right|$$

$$\text{(中值定理)}\quad = \left|\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n-\theta)\ln(n-\theta)}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)} - \frac{1}{n\ln n}(0<\theta<1),$$

由此可见$\sum(x_n - x_{n-1})$收敛，从而要证结论成立.

你已看到，以上证明程序已足够标准化，几无技巧可言. 因此，你完全有把握自己解决：

551 证明当 n 充分大时 $\sum_1^n 1/\sqrt{k} \approx 2\sqrt{n} + C$.

552 证明当 n 充分大时 $\sum_1^n k^{-1}\ln k \approx 2^{-1}\ln^2 n + C$.

现在转向另一类渐近公式：$A_n \approx CB_n$，C 是正常数. 它给出对 A_n 与 B_n 的一个更粗的比较，适用于 A_n，B_n 随 n 增长很快的情况. 约定 $A_n \approx CB_n \Leftrightarrow \lim\limits_n A_n/B_n = C \Leftrightarrow A_n = (C+\varepsilon_n)B_n$，$\varepsilon_n \to 0(n\to\infty)$. 显然渐近公式 $A_n \approx CB_n$ 存在 $\Leftrightarrow \sum\ln(x_{n+1}/x_n)$ 收敛，$x_n = A_n/B_n$. 因此问题归于应用已熟识的标准方法. 一些涉及阶乘的渐近公式的证明适于用此处给定的方法.

553 证明 $n! = (C+\varepsilon_n)n^{n+1/2}e^{-n}$，$C>0$，$\varepsilon_n \to 0$.

证 令 $x_n = n!n^{-n-1/2}e^n$，则

$$\ln\frac{x_n}{x_{n-1}} = \ln\left[e\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1/2}\right]$$

$$= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

可见$\sum\ln(x_n/x_{n-1})$收敛，从而所述渐近公式成立.

你注意到，尽管上题中要证的渐近公式似乎很精巧，但用本节的“标准化”的方法足可对付，算不上是什么难题. 你不妨自己解以下两题，你会发现这些题比初看起来容易.

554 证明$(2n-1)!! = (C+\varepsilon_n)(2n)^n e^{-n}$，$C>0$，$\varepsilon_n \to 0$.

555 证明$(1^2+1)(2^2+1)\cdots(n^2+1) = (C+\varepsilon_n)n^{2n+1}e^{-2n}$，

$C > 0, \epsilon_n \to 0$.

下面的问题看来要复杂些，但仍然不越出已知类型的范围.

556 设 $a_n > 0, a_{n+1}/a_n = p - rn^{-1} + \lambda_n n^{-s}, p > 0, s > 1$, λ_n 有界，证明 $a_n = (C + \epsilon_n)n^{-r/p}p^n, C > 0, \epsilon_n \to 0$.

证 令 $x_n = a_n n^{r/p} p^{-n}$，则

$$\begin{aligned}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \ln\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{r}{p}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln p \\ &= \ln\left(1 - \frac{r}{np} + \frac{\lambda_n}{n^s p}\right) + \frac{r}{p}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{r}{np} + \frac{\lambda_n}{n^s p} + \cdots + \frac{r}{np} - \frac{r}{2n^2 p} + \cdots,\end{aligned}$$

由此看出 $\sum\ln(x_{n+1}/x_n)$ 收敛，从而要证结论成立.

上题所述的渐近公式非常清晰地显示出当 $n \to \infty$ 对 a_n 的状态，这对诸如判定 $\sum a_n$ 收敛性这样的问题有重要意义. 你不妨考虑下题.

557 利用题 556 的结果得出一个级数收敛判别法.

最后，给出一个利用前述方法的稍不同的问题.

558 设 $a_n > 0, \lim\limits_n n[(a_n/a_{n+1}) - 1] = p > q$，证明 $a_n = o(n^{-q})$.

证 令 $x_n = n^q a_n$，只要证 $x_n \to 0$，这归于指明：

$$\begin{aligned}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n} &= q\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= q\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{p+\epsilon_n}{n}\right) \\ &= \frac{q-p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

5.3 重积分与逐次积分

5.3.1 化逐次积分为重积分

首先考虑公式：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y, \qquad (5.3.1)$$

其中 $D: a \leqslant x \leqslant b, c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$ 为平面区域. 公式(5.3.1)的主要功用是化二重积分为逐次积分，这种操作必为你所熟知，因这几乎是计算二重积分的唯一方法(即使用变量代换，最终还得化为逐次积分)，故必经过足够的练习. 然而，相反的转化亦有用处，但容易被忽略，现在正要予以强调.

设问题是计算一逐次积分，今要利用转化公式(5.3.1)求解，则可按以下步骤进行：

(i) 确定区域 D，依(5.3.1)转化为二重积分；

(ii) 变换或简化此二重积分(如作变量代换)；

(iii) 再依(5.3.1)化二重积分为逐次积分(但已不同于原来的逐次积分)；

(iv) 计算转化后的逐次积分.

559 求 $I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{x/y}\mathrm{d}y$.

解 内层积分无法算出，因此进行转化：

$$I = \iint\limits_{0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant y\leqslant 1} e^{x/y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y e^{x/y}\mathrm{d}x = \frac{e-1}{2}.$$

560 求 $I = \int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

解 据逐次积分确定 $D: 1 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant x \leqslant y^2$，于是

$$I = \iint_D \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x = \frac{4(\pi+2)}{\pi^2}.$$

为能迅速且准确地确定积分域 D，通常必要借助于几何上的观察，你试解以下几题.

561 求$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\int_1^{\sqrt{x}} e^{\ y^2}\mathrm{d}y \quad (= \frac{1}{e} - 1)$.

562 求$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y \quad (= 1 - \sin 1)$.

563 求$\int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}} x(x^2+y^2)^{\ 3/2}\mathrm{d}y \quad (= \ln\frac{3}{1+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 3)$.

以下问题依赖于一定的变量代换.

564 求

$$I = \int_0^a \mathrm{d}x\int_{-x}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2)(4a^2-x^2-y^2)}}.$$

解 先化为 D 上的重积分，D：由 $x^2+(y+a)^2=a^2$ 与 $y=-x$ 所围成，然后用极坐标：

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{4a^2-r^2}} = \int_{-\pi/4}^0 \mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{4a^2-r^2}} = \frac{\pi^2}{32}.$$

类似地可解：

565 求$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{4-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y \quad (= \frac{\pi}{4}(e^2+1))$.

对于 3 层逐次积分有类似的方法.

566 求 $I = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 先化为 V 上的三重积分，V：$x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 1$，$y \geqslant 0$，$z \geqslant 1$；然后用球坐标：$x = r\cos\theta\sin\varphi$，$y = r\sin\theta\sin\varphi$，$z =$

$r\cos\varphi + 1$，则

$$I = \iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{r^2+2r\cos\varphi+1}}$$

$$= \pi\int_0^1 r(r+1-\sqrt{r^2+1})\mathrm{d}r = \frac{\pi(7-4\sqrt{2})}{6}.$$

567 求 $I = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}z$.

解 化为重积分后用球坐标：

$$I = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r^4\mathrm{d}r = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

本段的方法常用来证明一些积分公式，以下问题虽然简单，但有其典型性.

568 设 $f \in C[a,b]$，证明 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b(b-y)f(y)\mathrm{d}y$.

证 先化为重积分，然后化为另一顺序的逐次积分：

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_y^b\mathrm{d}x = \int_a^b(b-y)f(y)dy.$$

仿此，你可解：

569 设 $f \in C[a,b]$，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.（参照题 929）

5.3.2 化三重积分为逐次积分

鉴于二重积分较易计算，在很多情况下应用以下“转化公式”是可取的：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z, \quad (5.3.2)$$

其中 D 是 V 在 xy 平面上的投影，曲面 $z = z_i(x,y)(i=1,2)$ 是 V 的“下底”与“上盖”. 只要(5.3.2)右端之内层积分可以算出，

通过(5.3.2)就将三重积分$\iiint\limits_V f\mathrm{d}v$化成了二重积分.

570 求$I=\iiint\limits_V xyz\mathrm{d}v$,$V$在第一卦限且由曲面$x^2+y^2=a_iz$,$xy=b_i$,$y=c_ix(i=1,2,0<a_1<a_2,0<b_1<b_2,0<c_1<c_2)$所界.

解 V在xy平面上的投影为D:$b_1\leqslant xy\leqslant b_2$,$c_1\leqslant y/x\leqslant c_2(x,y>0)$. 令$u=xy$,$v=y/x$,可将$D$变为矩形$b_1\leqslant u\leqslant b_2$,$c_1\leqslant v\leqslant c_2$,且Jacobi式$J=1/2v$. 于是

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{(x^2+y^2)/a_2}^{(x^2+y^2)/a_1}z\mathrm{d}z\\
&=\frac{a_2^2-a_1^2}{2a_1^2a_2^2}\iint\limits_D xy(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{a_2^2-a_1^2}{2a_1^2a_2^2}\int_{b_1}^{b_2}u^3\mathrm{d}u\int_{c_1}^{c_2}\frac{(1+v^2)^2}{2v^3}\mathrm{d}v\\
&=\frac{1}{32a_1^2a_2^2}(a_2^2-a_1^2)(b_2^4-b_1^4)\left[(c_2^2-c_1^2)\left(1+\frac{1}{c_1^2c_2^2}\right)+4\ln\frac{c_2}{c_1}\right]
\end{aligned}$$

571 求$I=\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}v$,$V$由曲面$z=ay^2$,$z=by^2(y>0,0<a<b)$,$z=\alpha x$,$z=\beta x(0<\alpha<\beta)$与$z=h(h>0)$围成.

解 与上题类似,但内层先对y积分,而D为区域:$z/\beta\leqslant x\leqslant z/\alpha$,$0\leqslant z\leqslant h$,

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z/b}}^{\sqrt{z/a}}\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\iint\limits_D x^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\
&=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)h^{9/2}.
\end{aligned}$$

以下两题由你来试试.

572 求$I=\iiint\limits_V xy^2z^3\mathrm{d}v$,$V$由曲面$z=xy$,$z=0$,$y=x$,$x$

$=1$ 围成.$(I=1/364)$

573 求 $I=\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}v$,$V$ 由曲面 $z=0$,$z=a$,$y=\sqrt{2x-x^2}$,$y=0$ 围成.$(I=8a^2/9)$

若被积函数仅含一个变元,例如 z,则可用以下公式直接将三重积分转化为定积分:

$$\iiint\limits_V f(z)\mathrm{d}v=\int_a^b f(z)S(z)\mathrm{d}z, \qquad (5.3.3)$$

其中 $S(z)$ 表 V 被平面 $Z=z$ 所截图形 D_z 之面积. 当然,仅当 $S(z)$ 容易求得时公式(5.3.3)才是方便的.

574 求 $I=\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}v$,$V$ 由曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 所界.

解 几何上的观察得出,D_z 是半径为 $\sqrt{2az-z^2}$(若 $0<z<a/2$)或 $\sqrt{a^2-z^2}$(若 $a/2<z<a$)的圆,因此

$$I=\pi\int_0^{a/2}z^2(2az-a^2)\mathrm{d}z+\pi\int_{a/2}^{a}z^2(a^2-z^2)\mathrm{d}z$$
$$=\frac{59\pi a^5}{480}.$$

575 求 $I=\iiint\limits_V y^2\mathrm{d}v$,$V$:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$,$z\geqslant 0$.

解 仍用公式(5.3.3),但以 y 换 z. D_y 是半个椭圆:$a^{-2}x^2+c^{-2}z^2\leqslant 1-b^{-2}y^2$,$z\geqslant 0$,其面积 $S(y)=2^{-1}\pi ac(1-b^{-2}y^2)$. 于是

$$I=\frac{\pi ac}{2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{15}ab^3c.$$

以上两题表明,为应用公式(5.3.3),确定 D_z 与 $S(z)$ 是关键的,而(5.3.3)中定积分的计算往往不成问题.

576 求 $I=\iiint\limits_V(Ax^2+By^2+Cz^2)\mathrm{d}v$, $V:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$(参照题 497 ~ 499).

解 用题577的算法得 $\iiint\limits_V y^2\mathrm{d}v=4\pi ab^3c/15$. 于是由对称性得出 $I=(4/15)\pi abc(Aa^2+Bb^2+Cc^2)$.

577 求 $I=\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}v$, $V:x^2+y^2\leqslant z^2, 0\leqslant z\leqslant h$.

解 首先由对称性得 $I=\iiint\limits_V z\mathrm{d}v$;然后用公式(5.3.3)得

$$I=\int_0^h z\cdot\pi z^2\mathrm{d}z=\pi h^4/4.$$

5.4 曲线积分与二重积分

设 D 是一平面区域,L 是 D 的边界,沿 L 正向行进时保持 D 在左边,P,Q 是 $D+L$ 上的连续可微函数,著名的 Green 公式

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.4.1}$$

可用来实现两种互相反向的转化:

(i) 化左端的曲线积分为右端的二重积分,Q_x-P_y 愈简单(最好是 $Q_x\equiv P_y$!),这一转化愈有利.

(ii) 化给定的二重积分 $\iint\limits_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 因不易找到适当的函数 P,Q 使得 $f=Q_x-P_y$,这一转化难以实现,只用于某些特殊情况,如面积的计算.

5.4.1 化曲线积分为二重积分

578 求 $I = \oint\limits_{|x|+|y|=1} x^2y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$.

解 直接应用(5.4.1),并用对称性得

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (y^2 - x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

579 求 $I = \oint\limits_{x^2+y^2=a^2} e^{y^2-x^2}(\cos 2xy\mathrm{d}x + \sin 2xy\mathrm{d}y)$.

解 对此题有 $Q_x \equiv P_y, I = 0$.

应用公式(5.4.1)时,很可能疏忽的事情是:验明 L 确围成 D 且 P,Q 在 $D+L$ 上连续可微.当这些条件下不满足时不能直接应用(5.4.1).不过,仍有以下变通办法来扩大 Green 公式的应用.

(a) 若 L 非闭路,则以最有利的方式将其补成闭路,例如补入线段 $\overline{BA}$ 得出闭路 Γ, A, B 是 L 的起迄点.此时可将公式(5.4.1)修改为:

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{\overline{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \tag{5.4.2}$$

其中 D 为 Γ 所围区域,$\pm$ 号决定于 L 之方向.当 $\overline{AB}$ 平行于坐标轴或 P,Q 在 $\overline{AB}$ 上为零时应用公式(5.4.3)最为有利.

(b) 若 L 是闭路,除 D 内某点 A 外 P,Q 连续可微且 $Q_x \equiv P_y(\Leftrightarrow P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}u)$,则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \tag{5.4.3}$$

其中 C 是 D 内与 L 同一方向环绕"奇点"A 的任何闭路.适当选择 C,可能使积分简化.

580 求 $I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})]\mathrm{d}y, L: y = \sin x (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

解 显然应补入"张在弓上的弦"，以围出"半月形"D，然后应用(5.4.2)得：

$$I = -\iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^\pi x\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} y^2 \mathrm{d}y + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{4}{9}.$$

581 求 $I = \int_L (e^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (e^x \cos y - m)\mathrm{d}y$，$L$ 是从原点到$(a,0)$的上半圆周 $y = \sqrt{ax - x^2}$.

解 类似于上题，补入一条"弦"，且注意沿此弦的积分为零，$I = -m\pi a^2/8$.

582 求 $I = \int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}, L: (x-1)^2 + y^2 = a^2, a > 1$.

解 L 内部含有"奇点"(0,0)，不能直接用 Green 公式，但观察到

$$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\operatorname{arctg}\frac{y}{2x},$$

可以椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 换 L：

$$I = \int_{4x^2+y^2=1} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \iint_{4x^2+y^2 \leqslant 1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi.$$

上面最后一步用了 Green 公式. 你不应有这样的疑问：存在奇点(0,0)，如何能用 Green 公式呢？实际上，改换积分路径后，被积表达式已简化为 $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，因而"奇点"(0,0)已被消去了.

583 求 $I=\int_L \frac{xy(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{x^4+y^4}$, $L: x^2+y^2=1$.

解 被积表达式可写成 $2^{-1}\mathrm{d}\operatorname{arctg}(y/x)^2$,故有

$$I=\int\limits_{x^4+y^4=1} xy(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

注 如不易看出被积表达式为全微分,可直接验证,除奇点(0,0)外恒有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^4+y^4}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-xy^2}{x^4+y^4}\right).$$

584 求 $I=\int\limits_{x^2+y^2=1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2}$, $a,b,c>0, ac>b^2$.

解 类似于题582,易验证被积表达式为全微分.条件 $ac>b^2$ 推出二次型 $\varphi=ax^2+2bxy+cy^2$ 正定,因此(0,0)是唯一奇点,且 $L: \varphi=1$ 是椭圆.于是

$$I=\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2S,$$

S 是椭圆 $\varphi\leqslant 1$ 之面积.由题401,$S=\pi/\sqrt{ac-b^2}$,因此 $I=2\pi/\sqrt{ac-b^2}$.

585 求 $I=\int_L\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}$,$L$ 是环绕原点的简单闭曲线,$u=\alpha x+\beta y, v=\gamma x+\delta y, \alpha\delta\neq\beta\gamma$.

解 条件 $\alpha\delta\neq\beta\gamma$ 推出仅当 $x=y=0$ 时,$u=v=0$,因此(0,0)是唯一奇点,$u^2+v^2=1$ 是椭圆.于是

$$I=\int\limits_{u^2+v^2=1} u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u=\int\limits_{u^2+v^2=1}(\beta\gamma-\alpha\delta)(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$$

$$=2(\alpha\delta-\beta\gamma)\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2\pi(\alpha\delta-\beta\gamma)}{|\alpha\delta-\beta\gamma|},$$

最后一步用到题401.

看过题582~585之后,你已能形成某些综合性结论.设要

求积分 $I=\int_L R^{-1}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$，$L$ 是闭曲线，L 内部有唯一点，如(0,0)，使 $R(0,0)=0$，$R^{-1}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$ 是全微分，D 是 L 的内部，P,Q 在 $D+L$ 上连续可微，则

$$I=\int\limits_{R=1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_{R\leqslant 1}(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

某些特殊形状的第一类曲线积分可转化为第二类曲线积分，然后应用 Green 公式. 以下是两个典型例子.

586 求 $I=\int_L\cos(\boldsymbol{A}\hat{,}\boldsymbol{n})\mathrm{d}s$，$\boldsymbol{A}$ 是非零常矢量，$\boldsymbol{n}$ 是闭曲线 L 的单位外法矢.

解 设 $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{n}=n_1\boldsymbol{i}+n_2\boldsymbol{j}$，可设 $|\boldsymbol{A}|=1$，则

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{A}\hat{,}\boldsymbol{n})\mathrm{d}s&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=(a_1n_1+a_2n_2)\mathrm{d}s\\&=a_1\mathrm{d}y-a_2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中用到等式 $n_1\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$，$n_2\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x$（这可从几何观察得出）. 于是

$$I=\int_L a_1\mathrm{d}y-a_2\mathrm{d}x=\int_L\mathrm{d}(a_1y-a_2x)=0.$$

587 求 $I=\int_L\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$，$L$ 是包围区域 D 的简单闭曲线，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{n}$ 同上题.

解 类似于上题，

$$I=\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2S,$$

S 是 D 之面积.

5.4.2 化二重积分为曲线积分

主要的应用是依以下公式计算面积：

$$\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L x\mathrm{d}y=-\int_L y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.\tag{5.4.4}$$

588 求由曲线$L:(x/a)^n+(y/b)^n=1,x,y\geqslant 0(a,b>0,n\geqslant 1)$与$x,y$轴所围区域$D$之面积$S$.

解 用公式(5.4.4),并令$x=a(\cos t)^{2/n},y=b(\sin t)^{2/n}$:

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{ab}{n}\int_0^{\pi/2}(\sin t\cos t)^{2/n-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{ab}{2n}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)(\text{参考题 65}).\end{aligned}$$

589 求曲线$L:x=\cos t+t\sin t,y=\sin t-t\cos t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x=1$所围区域$D$之面积$S$.

解 当t从0增至2π时,L从$(1,0)$出发绕过原点止于点$(1,-2\pi)$.设D的边界为Γ,则

$$S=\frac{1}{2}\int_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}t^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^0\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi^3+\pi.$$

注 上例表明,积分$\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$不一定比看来更简单的积分$\int_L x\mathrm{d}y$难计算.

590 求曲线$L:x=2t-t^2,y=2t^2-t^3$所围面积S.

解 本题的特点是参数t的变程尚待确定.因$x'(t)=2(1-t)$,故$x(t)$在$t<1$时增加,$t>1$时减少,仅当$t=0,2$时$x(t)=0$.其次,$y(0)=y(2)=0$,可见$(0,0)$是L的唯一自交点,故取$0\leqslant t\leqslant 2$.于是

$$S=\int_L x\mathrm{d}y=\int_0^2(2t-t^2)(4t-3t^2)\mathrm{d}t=\frac{8}{15}.$$

除面积计算之外,还有少数二重积分可化为曲线积分计算.试看以下例子.

591 求$I=\iint\limits_{x^n+y^n\leqslant 1}(|x|^m+|y|^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(m>0,n>0)$.

解 首先用对称性将积分域缩至 1/4，然后用公式(5.4.1)(注意$(xy^m)_x = y^m$)，得 $I = 8\int_L xy^m \mathrm{d}y, L: x^n + y^n = 1(x, y \geqslant 0)$. 令 $x^n = \cos^2 t, y^n = \sin^2 t$，得

$$I = \frac{16}{n}\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{\frac{2m-n+2}{n}} (\cos t)^{\frac{n+2}{n}} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{8}{n} B\left(\frac{m+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)（用题 65）.$$

利用上题可解

592 求 $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$.

593 求 $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} (3x^2 + 5y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (= 2\sqrt{2}\pi)$.

594 求 $I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (3x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $I = \int\limits_{x^2+y^2=1} (x^3 + xy^2)\mathrm{d}y = \int\limits_{x^2+y^2=1} x\mathrm{d}y = \pi$.

595 求 $I = \iint\limits_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是曲线 $L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴所围之区域.

解 利用公式(5.4.1) 并注意 L 的方向：

$$I = \frac{1}{3}\int_L y^3 \mathrm{d}x = \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 \mathrm{d}t = \frac{35\pi a^4}{12}.$$

5.5 曲线积分与曲面积分

设 S 是一双侧曲面，L 是 S 的边界，沿 L 的正向行进时保持 S 的指定侧在左边，P, Q, R 是 $S + L$ 上的连续可微函数，与 Green 公式相对应的 Stokes 公式

$$\int_L P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{5.5.1}$$

主要用来化曲线积分为曲面积分. 应用(5.5.1)时要注意，以 L 为边界的曲面不是唯一的. 仅当对某个适当选取的 S，(5.5.1)右端便于计算时，利用公式(5.5.1)才有价值. 当 L 是平面曲线时一般应取 S 为 L 所围之平面块.

596　求 $I = \int_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，$L$：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$y = x\mathrm{tg}\alpha (0<\alpha<\pi/2)$，从 x 轴正向看去 L 为反时针方向.

解　设 S 为 L 所围之圆盘，其法矢与 x 轴正向夹锐角，则由(5.5.1)有

$$\begin{aligned} I &= -2\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -2\iint_S (\sin\alpha - \cos\alpha)\mathrm{d}S = 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha). \end{aligned}$$

597　求 $I = \int_L (y+1)\mathrm{d}x + (z+2)\mathrm{d}y + (x+3)\mathrm{d}z$，$L$：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，从 z 轴正向看法 L 为反时针方向.

解　设 S 是 L 所围圆盘，类似于上题，

$$I = -\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(用对称性)　$$= -3\iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

上题的积分亦可如下计算(参考4.4，5.6)：

$$I=\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=3\int_L y\mathrm{d}x$$

$$=3\int_{L_{xy}} y\mathrm{d}x=-3\sigma=-\sqrt{3}\pi a^2,$$

其中 L_{xy} 是 L 在 xy 平面上之投影，σ 是 L_{xy} 所围面积(参考题401).

598 求 $I=\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，$L$：$x^2+y^2+z^2=4$，$x+y=2$，从 x 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 设 S 为 L 所围圆盘，则其面积为 2π，其法矢之方向余弦为 $\sqrt{2}/2$，$\sqrt{2}/2$，0，因此

$$I=-\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}S=-2\sqrt{2}\pi.$$

599 求 $I=\int_L y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$，$L$：$x^2+y^2=2y$，$y=z$，从 z 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 设 S 为 L 所围椭圆，则其法矢之方向余弦为 0，$-\sqrt{2}/2$，$\sqrt{2}/2$，于是

$$I=-\iint_S z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S(y-z)\mathrm{d}S=0,$$

最后一步用到 S 关于 y，z 的对称性.

600 求 $I=\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$L$：$x^2+y^2=a^2$，$a^{-1}x+b^{-1}y=1$，从 x 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 设 S 为 L 所围椭圆截面，则其法矢之方向余弦为 b/c，0，a/c，其面积为 πac，$c=\sqrt{a^2+b^2}$. 于是

$$I = -2\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\iint_S \frac{a+b}{c}\mathrm{d}S = -2\pi a(a+b).$$

亦可化为平面曲线积分(参考 5)：

$$I = \int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + \int_L z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z = -2\pi a(a+b).$$

601 求 $I = \int_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$，$L$ 是平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ 上的简单闭曲线，L 所围平面块 S 之面积为 σ，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是平面法矢之方向余弦.

解 依然用公式(5.5.1)：

$$I = 2\iint_S \cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_S (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S \mathrm{d}S = 2\sigma.$$

5.6 平面与空间曲线积分

平面曲线积分无疑比空间曲线积分简单，因此有必要考虑化空间曲线积分为平面曲线积分的方法，而这正是本节所要作的.

设 L 是一空间曲线，L_{xy} 是 L 在 xy 平面上的投影，其方向与 L 一致(这意味着 L 上顺次的两点对应 L_{xy} 同一序向的两点)；L_{yz} 与 L_{zx} 仿此，设 P，Q，R 是在包含 L 的某区域内有定义的函数. 若 P，Q 与 z 无关，则有如下转化公式：

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_{xy}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \qquad (5.6.1)$$

从几何观察看来，公式(5.6.1)是很自然的，如果你已充分理解曲线积分的定义，不难给出公式(5.6.1)的严格证明. 通过轮换字母，可写出"投影到"L_{yz} 或 L_{zx} 上的积分公式. 一般地，若有分解

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z =$$
$$(P_1\mathrm{d}x + Q_1\mathrm{d}y) + (Q_2\mathrm{d}y + R_2\mathrm{d}z) + (P_2\mathrm{d}x + R_1\mathrm{d}z), \qquad (5.6.2)$$

使得 P_1, Q_1 与 z 无关，Q_2, R_2 与 x 无关，P_2, R_1 与 y 无关，则有公式：

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z =$$
$$\int_{L_{xy}} P_1\mathrm{d}x + Q_1\mathrm{d}y + \int_{L_{yz}} Q_2\mathrm{d}y + R_2\mathrm{d}z + \int_{L_{zx}} R_1\mathrm{d}z + P_2\mathrm{d}x. \qquad (5.6.3)$$

分解式(5.6.2)固然不常有，但在许多常见的简单情况下是可行的，因而公式(5.6.3)不乏其用，本节的例题将足以说明这一点.

602 求 $I = \int_L z^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}z$，$L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$x + z = a$，从 z 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 首先由对称性断定 $\int_L y^2\mathrm{d}z = 0$，$I = 2\int_L x^2\mathrm{d}y$(参考 4.4)，然后用(5.6.1)得

$$I = 2\int_{L_{xy}} x^2\mathrm{d}y = 4\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是 L_{xy} 所围之区域. 因 D 之重心为 $(a/2,0)$，其面积为 $\pi(a/\sqrt{2})^2/\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi a^2/4$，故(参考 3.5.2)

$$I = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}.$$

603 求$I = \int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，$L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$，从 z 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 直接利用公式(5.6.3)得

$$I = \int_{L_{xy}} y^2\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y + \int_{L_{yz}} z^2\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}z + \int_{L_{zx}} x^2\mathrm{d}z - z^2\mathrm{d}x$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

设 D 为 L_{xy} 所围区域，则由 Green 公式与对称性得

$$I_1 = -2\iint_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

同理 $I_2 = I_3 = 0$，因此 $I = 0$.

你不妨用 Stokes 公式解上题以作验证.

604 求$I = \int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，$L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x$，从 x 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 首先注意$\int_L y\mathrm{d}x = 0$，于是$I = \int_L z\mathrm{d}y + \int_L x\mathrm{d}z = I_1 + I_2$. 设 D 为 L_{yz} 所围区域，则

$$I_1 = \int_{L_{yz}} z\mathrm{d}y = -\iint_D \mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}.$$

类似地可算出 $I_2 = \pi a^2/\sqrt{2}$，因此 $I = 0$.

605 求$I = \int_L y^2\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y - yz\mathrm{d}z$，$L: x^2 + y^2 = 2y, y = z$，从 z 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 用(5.6.3)作分解：

$$I = \int_{L_{xy}} y^2\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + \int_{L_{yz}} yz\mathrm{d}z = I_1 + I_2.$$

不难算出 $I_1 = -\pi, I_2 = 0$，因此 $I = -\pi$.

606 求 $I = \int_L xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}z, L: z = x^2 + y^2, z = x$，从 z 轴正向看去 L 为反时针方向.

解 类似于上题作分解：

$$I = \int_{L_{xy}} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \int_{L_{yz}} y^2\mathrm{d}z = I_1 + I_2.$$

算出 $I_1 = \pi/8, I_2 = 0$，得 $I = \pi/8$.

为验证以上几题的结果，你不妨用 Stokes 公式再算一遍.

5.7 曲面积分与三重积分

设 V 是一空间区域，S 是 V 的边界面，函数 P,Q,R 在 $V+S$ 上连续可微. 著名的 Gauss 公式

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V (P_x + Q_y + R_z)\mathrm{d}v \tag{5.7.1}$$

的主要功用是化曲面积分为三重积分，(5.7.1) 左端积分是对 S 外侧求的. 应用公式(5.7.1) 通常有明显效果，当 S 由多块曲面拼成因而(5.7.1) 左端不易直接计算时尤其如此.

607 求 $I = \iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是由曲面 $x^2+y^2+z^2 = a^2, x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ 及 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体之外表面.

解 直接用(5.7.1) 并用球坐标：

$$I = \iiint\limits_V (2z + \sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}v$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/4} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^{2a} (2\cos\varphi + \sin\varphi)r^3\mathrm{d}r = \frac{15}{16}(\pi + 2)a^4.$$

608 求 $I=\iint\limits_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yx^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是由曲面 $z=x^2+y^2(x,y\geqslant 0)$，$x^2+y^2=1$ 及三坐标面所围立体 V 之外表面.

解 直接用(5.7.1)并用柱面坐标：

$$I=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{r^2}(r^2+z^2)\mathrm{d}z=\frac{5\pi}{48}.$$

609 求 $I=\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是由曲面 $x^2+y^2=a^2$，$z=h(h>0)$ 及三坐标面所围立体 V 之外表面.

解 用公式(5.7.1)并考虑到对称性：

$$I=\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_V x\mathrm{d}v+\frac{h}{2}\cdot\frac{\pi a^2h}{4}$$

$$=\frac{2a^3h}{3}+\frac{\pi a^2h^2}{8},$$

其中用到 V 的重心坐标 $\bar{z}=h/2$(参考3.5.2).

610 求 $I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是 V：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$ 之外表面.

解 用公式(5.7.1)及重心公式，$I=(8/3)\pi R^3(a+b+c)$.

611 求 $I=\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[z^{-1}f(y/z)+y^3]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[y^{-1}f(y/z)+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体 V 之外表面，$f\in C^1$.

解 用公式(5.7.1)并用球坐标：

$$I=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\frac{93}{5}\pi(2-\sqrt{2}).$$

若令 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$，$\boldsymbol{n}$ 记 S 之单位外法矢，则(5.7.1)可写成(参考 5.8.1)

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}v. \qquad (5.7.2)$$

这一矢量写法有时更为方便.

612 求 $I=\iint_S \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})}{r^2}\mathrm{d}S$，$S$ 是立体 V 之外表面，$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{n}$ 是 S 之单位外法矢.

解 首先注意 $I=\iint_S r^{-3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$. 若 V 不含原点，则

$$I=\iiint_V \mathrm{div}(r^{-3}\boldsymbol{r})\mathrm{d}v=0.$$

若 V 含原点，则不能直接用Gauss公式，对于这种含“奇点”的情况，有一个类似于曲线积分的结论(参考 5.4.1)：当 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$ 时 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 与 S 的选取无关，只要 S 包围唯一的奇点. 在本题中取 S 为球面 $r=1$，然后用 Grass 公式：

$$I=\iint_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} 3\mathrm{d}v=4\pi.$$

与 5.4 中“补成闭曲线”的做法相对应，此处可考虑“补成闭曲面”的技巧.“补块”最好是平行于坐标面的平面块；当被积函数在其上为零时尤好.

613 求 $I=\iint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yx^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 之上侧.

解 S 加下底后围成半球体 V，于是

$$I=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\frac{2\pi a^5}{5}$$

(参考题 497).

614 求 $I = \iint\limits_{S}(x^2 - 2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2 - 2yz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - 2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 同上题.

解 类似于上题，且考虑到对称性：

$$I = 2\iiint\limits_{V}(x - z)\mathrm{d}v + \iint\limits_{x^2 - y^2 \leqslant a^2}(1 - 2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\iiint\limits_{V} z\mathrm{d}v + \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi a^2 - 2^{-1}\pi a^4.$$

倒用公式(5.7.1)，即化三重积分为曲面积分的机会甚少. 除了体积公式

$$\iiint\limits_{V}\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\iint\limits_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

外，只有一些很特殊的例子. 试看一例：

615 求 $I = \iiint\limits_{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1}\mathrm{div}(r^6\boldsymbol{r})\mathrm{d}v$，$\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$，$r = |\boldsymbol{r}|$.

解 由公式(5.7.2)，

$$I = \iint\limits_{x^2 + y^2 + z^2 = 1} r^6\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2 + y^2 + z^2 = 1}\mathrm{d}S = 4\pi.$$

5.8 第一与第二类曲面积分

第一类与第二类曲面积分自然不同. 不过，对于二者的差别，你从现行微积分学教科书中获得的印象可能过于强烈了，以至常常忽略二者的密切联系，因而失去许多互相转化的机会. 本节就是要唤起你对这种转化的重视.

首先，你应熟悉以下基本公式：

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \quad (5.8.1)$$

其中 $\boldsymbol{F} = \{P,Q,R\}$，$\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的单位法矢，它指向曲面的指定的一侧.

5.8.1 第一种转化

公式(5.8.1)主要用来化其左端的第二类曲面积分为第一类曲面积分 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，当 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 或 $\mathrm{d}S$ 比较简单时(如当 S 为球面、锥面或柱面时往往如此)，这种转化特别有利. 实际上，在 5.5，5.7 中已用过这种转化了. 下面是进一步的例子.

616 求 $I = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之外侧.

解 令 $\boldsymbol{r} = \{x,y,z\}$(以下保留此记号)，则 $\boldsymbol{r}/a$ 是 S 的单位外法矢，于是依(5.8.1)有

$$I = \iint_S \boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{a}\mathrm{d}S = a\iint_S \mathrm{d}S = 4\pi a^3.$$

617 求 $I = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是锥面 $z^2 = x^2 + y^2 (0 \leqslant z \leqslant h)$ 之上侧.

解 几何观察看出 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的法矢，因此 $I = 0$.

618 求 $I = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1 (0 \leqslant z \leqslant 3)$ 之外侧.

解 S 的单位外法矢 $\boldsymbol{n} = \{x,y,0\}$，因此

$$I = \iint_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_S \mathrm{d}S = 6\pi.$$

619 求 $I = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是曲面 $z = x^2$

$+y^2((x,y)\in D)$ 之下侧，D 由 $x=1-y^2$ 与 $x=y^2-1$ 围成.

解 令 $\boldsymbol{F}=\{x,-1,2x^2\}$，$S$ 的单位法矢(朝下)$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,-1\}/\sqrt{1+4x^2+4y^2}$，于是依(5.8.1)有

$$I=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=-2\iint_S\frac{y\mathrm{d}S}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$=-2\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0(\text{用对称性}).$$

你大概已从上面的解法中看出某种规律，那么请你解下题.

620 设 S 是曲面 $z=z(x,y)((x,y)\in D)$ 之下侧，P,Q,R 在 S 上连续，证明：

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(z_xP+z_yQ-R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.8.2}$$

作为应用公式(5.8.2)的例子，请看：

621 求 $I=\iint_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant x,y\leqslant 1)$ 之上侧.

解 直接用公式(5.8.2)：

$$I=\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$

5.8.2 第二种转化

反向应用公式(5.8.1)似乎有难处.首先，给定一个第一类曲面积分 $\iint_S f\mathrm{d}S$，一般难以找到恰当的 $\boldsymbol{F}$，使 $f=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$；即使已有这样的表达，(5.8.1)左端之积分亦未必容易计算.不过，仍可举例说明，化第一类曲面积分为第二类曲面积分的转化是有用的

622 求 $I=\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S$：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

解 S 的单位法矢 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/a$，而 $x+y+z=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{F}=\{a,a,a\}$，于是依(5.8.1)有

$$I=\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=a\iint\limits_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3.$$

注 意上题可用 $I=\iint\limits_S z\mathrm{d}S$ 直接计算，故上面的解法并无明显好处. 下面的例子也许较有意思.

623 求 $I=\iint\limits_S (x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}S$，$S$ 同上题.

解 设 V：$0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，用(5.8.1)并用 Gauss 公式：

$$I=a\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2a\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}v=2a\iiint\limits_V z\mathrm{d}v=\frac{\pi a^5}{2}.$$

624 求 $I=\iint\limits_S \rho\mathrm{d}S$，$S$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，$\rho$ 是原点到 S 的切平面之距离.

解 以 $\boldsymbol{n}$ 记 S 的外向单位法矢. 由几何考虑得出 $\rho=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$，于是(参考 5.7.2)

$$I\iint\limits_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \mathrm{div}\boldsymbol{r}\mathrm{d}v$$

$$=3\iiint\limits_V \mathrm{d}v=4\pi abc,$$

其中 V 记椭球体.

理解了上题你就能证明：

625 设S是围住体积V的光滑闭曲面，ρ是原点到S切平面之距离，证明$\iint\limits_S \rho \mathrm{d}S = 3V$.

626 求$I = \iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{\rho}$，$S$与$\rho$依题624.

解 依题624中的记号，有

$$I = \iint\limits_S \rho^{-2}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \mathrm{div}(\rho^{-2}\boldsymbol{r})\mathrm{d}v.$$

算出$\rho^{-2} = a^{-4}x^2 + b^{-4}y^2 + c^{-4}z^2$，$\mathrm{div}(\rho^{-2}\boldsymbol{r}) = 5\rho^{-2}$，于是

$$I = 5\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\text{（参考题 498）.}$$

5.9 Taylor 系数与 Fourier 系数

5.9.1 Taylor 系数

若$f(x)$能展开为x的幂级数：$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$（称为Taylor级数），则其系统$a_n$（称为Taylor系数）可表为：

$$a_n = f^{(n)}(0)/n!, n = 0,1,2,\cdots. \qquad (5.9.1)$$

公式(5.9.1)是联系微分学与级数理论的一个重要结果. 不过，你或许有点看轻公式(5.9.1)的作用. 确实，在实际展开一个函数为幂级数时很少直接应用(5.9.1)来计算Taylor系数. 但如本章的经验所昭示的，任何公式都可从两个方向加以利用，公式(5.9.1)亦不例外. 本节要强调的是：利用(5.9.1)可将求导问题转化为级数展开问题.

首先看一些用$f^{(n)}(0) = n!a_n$计算$f^{(n)}(0)$的例子.

627 设 $f(x)=1/(1+x^2)$,求 $f^{(n)}(0)$.

解 由 $f(x)=\sum_0^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 直接得出 $f^{(2n)}(0)=(-1)^n(2n)!$,而 $f^{(2n+1)}(0)=0(n\geqslant 0)$.

628 设 $f(x)=1/(x^2+x+1)$,求 $f^{(n)}(0)$.

解 因 $f(x)=(1-x)/(1-x^3)=\sum_0^{\infty}x^{3n}-\sum_0^{\infty}x^{3n-1}$.故 $f^{(3n)}(0)=(3n)!$,$f^{(3n+1)}(0)=-(3n+1)!$,$f^{(3n+2)}(0)=0(n\geqslant 0)$.

629 设 $f(x)=x\exp(-x^2)$,求 $f^{(n)}(0)$.

解 $f(x)=\sum_0^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/n!$,$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n+1)!/n!$,$f^{(2n)}(0)=0(n\geqslant 0)$.

630 设 $f(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$,求 $f^{(n)}(0)$.

解 利用 Euler 公式;令 $z=e^{i\alpha}$,则

$$f(x)=e^{x\cos\alpha}\cdot\frac{1}{2}(e^{ix\sin\alpha}+e^{-ix\sin\alpha})$$

$$=\frac{1}{2}(e^{zx}+e^{\bar{z}x})=\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{z^n+\bar{z}^n}{n!}x^n,$$

于是 $f^{(n)}(0)=(z^n+\bar{z}^n)/2=\cos n\alpha$.

631 设 $f(x)=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$,求 $f^{(n)}(0)(=\sin n\alpha)$.

题 627 ~ 631 表明,一旦写出了 $f(x)$ 的 Taylor 级数,写出 $f^{(n)}(0)$ 就不费吹灰之力.一个更诱人的问题是:能否以类似的方法计算 $f^{(n)}(x)$?为此注意到:若 $f(x+h)$ 能展开为 h 的幂级数,则必定

$$f(x+h)=\sum_0^{\infty}f^{(n)}(x)h^n/n!. \qquad (5.9.2)$$

因此 $f(x+h)=\sum_0^{\infty}a_n h^n\Rightarrow f^{(n)}(x)=n!a_n$.

632 设 $f(x)=1/(ax+b)$,求 $f^{(n)}(x)$.

解 利用 $f(x+h)=f(x)/[1+ahf(x)]$ 求得

$$f(x)=\sum_0^{\infty}(-1)^n a^n[f(x)]^{n+1}h^n,$$

于是 $f^{(n)}(x)=(-1)^n n! a^n (ax+b)^{-n-1}$.

633 设 $f(x)=1/(1-x^2)$，求 $f^{(n)}(x)$（参照题 241）.

解 利用 $f(x+h)=[(x-i+h)^{-1}-(x+i+h)^{-1}]/2i$ 可得：

$$f(x)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]h^n,$$

故
$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]$$
$$=(-1)^n n! \operatorname{Im}(x-i)^{-n-1},$$

$\operatorname{Im} z$ 记 z 的虚部. 令 $\varphi=\operatorname{arcctg} x$，则 $x-i=\sqrt{x^2+1}e^{-i\varphi}$，

$$(x-i)^{-n-1}=(x^2+1)^{-(n+1)/2}e^{i(n+1)\varphi},$$

因此 $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x^2+1)^{-(n+1)/2}\sin[(n+1)\operatorname{arcctg} x]$.

634 设 $f(x)=\exp x^2$，求 $f^{(n)}(x)$.

解 因 $f(x+h)=f(x)e^{2xh}f(h)$，故

$$f(x+h)=f(x)\sum_0^\infty \frac{(2xh)^k}{k!}\sum_0^\infty \frac{h^{2m}}{m!}$$
$$=f(x)\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{2m+k=n}\frac{(2x)^k}{k!\,m!}\right)h^n,$$

于是
$$f^{(n)}(x)=n!f(x)\sum_{2m+k=n}\frac{(2x)^k}{k!m!}.$$

635 设 $f(x)=e^{1/x}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解 利用 $(x+h)^{-1}=\sum_0^\infty(-1)^k h^k x^{-k-1}$ 得

$$f(x+h)=f(x)\exp\left[\sum_1^\infty(-1)^k h^k x^{-k-1}\right]$$
$$=f(x)\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{m!}\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^k h^k}{x^{k+1}}\right)^m.$$

分出 h^n 的系数得出

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n f(x)x^{2n}\left[1+n(n-1)x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}x^2+\cdots\right].$$

如果你能试一下直接计算以上两题中的 $f^{(n)}(x)$，想必会对此处的算法留下强烈印象.

636 设 $f(x)=g(x)\varphi(x)$，$g(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在每点可展开为 Taylor 级数，求 $f^{(n)}(x)$.

解 利用幂级数的乘法规则：

$$f(x+h)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}g^{(i)}(x)h^i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(x)h^j$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{i+j=n}\frac{1}{i!j!}g^{(i)}(x)\varphi^{(j)}(x)\Big]h^n,$$

故
$$f^{(n)}(x)=\sum\nolimits_0^n\binom{n}{i}g^{(i)}(x)\varphi^{(n-i)}(x).$$

注 以上结果正好与 Leibniz 规则相合.

5.9.2 Fourier 系数

若 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可展开为 Fourier 级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\nolimits_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad (5.9.3)$$

则"Fourier 系数"a_n 必可表为：

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,n\geqslant 0;\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n\geqslant 1.\end{cases}\quad (5.9.4)$$

你从上段获得的经验很可能启示如下思路：能否通过间接途径得出展开式(5.9.3)，然后依(5.9.4)计算积分？下面的例子表明在某些场合这是可行的.

637 求 $I_n=\int_0^\pi\cos^n x\cos nx\mathrm{d}x\quad(n\geqslant 0)$(参照题 129).

解 令 $f(x)=\cos^n x$，则 $f(x)$ 可展开为余弦级数：$f(x)=2^{-1}a_0+\sum a_k\cos kx$，且 $a_n=(2/\pi)I_n$. 另一方面，

$$f(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum\nolimits_0^n\binom{n}{k}e^{i(n-2k)x}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_k^n\binom{n}{k}\cos(n-2k)x,$$

由此得出 $a_n=2^{1-n}$，因此 $I_n=\pi 2^{-n}$.

类似地你可以解：

638 求 $\int_0^\pi \sin^n x\sin nx\mathrm{d}x \quad (=2^{-n}\pi\sin(n\pi/2))$.

639 求 $I_n=\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos(n+1)x\mathrm{d}x$.

解 因 $f(x)=\sin^{n-1}x$ 的 Fourier 展开式不含项 $a_{n+1}\cos(n+1)x$（参考(1.2.2)，(1.2.3)，故 $I_n=0$.

640 求 $\int_0^\pi \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x \quad (=0)$.

641 求 $I_n=\int_0^\pi \frac{\sin x\sin nx}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x(|q|<1)$.

解 令 $f(x)=\sin x/(1-q\cos x+q^2)$，则 $f(x)$ 可展开为正弦级数：$f(x)=\sum_1^\infty b_n\sin nx$，$b_n=2I_n/\pi$. 另一方面，

$$f(x)=\frac{1}{2i}[e^{ix}(1-qe^{ix})^{-1}-e^{-ix}(1-qe^{-ix})^{-1}]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_0^\infty q^n[e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x}]$$

$$=\sum_1^\infty q^{n-1}\sin nx,$$

故有 $b_n=q^{n-1}$，从而 $I_n=b_n\pi/2=\pi q^{n-1}/2$.

如果用其它方法计算，上面的积分是否很容易呢？你不妨试一下.

642 求 $I_n=\int_0^\pi \frac{\cos nx}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x \quad (|q|<1,n\geqslant 1)$.

提示：类似于上题. $I_n=\pi q^n/(1-q)^2$.

643 求 $I_n=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\mathrm{d}x(n\geqslant 1)$.

解 令 $f(x)=e^{\cos x}\cos(\sin x)$，则 $f(x)$ 可展开为余弦级数：$f(x)=2^{-1}a_0+\sum_1^\infty a_n\cos nx$. 如前几题一样，展开式可借助于

Euler 公式得到：

$$f(x)=e^{\cos x}\cdot\frac{1}{2}(e^{i\sin x}+e^{-i\sin x})$$
$$=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{\bar{z}})\qquad(z=e^{ix})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}(z^{n}+\bar{z}^{n})/n!=\sum_{0}^{\infty}(\cos nx)/n!,$$

因此 $I_n=\pi a_n=\pi/n!$.

自然有一个对偶的问题：

644 求$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\sin(\sin x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(=\pi/n!,n\geqslant 1)$.

645 求 $I_n=\int_0^{2\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\mathrm{d}x(n\geqslant 1)$.

解 参照前两题，容易得出 $I_n=2\pi a^n/n!$.

5.10 转化的其它例子

5.10.1 三角函数间的转化

利用恒等式$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x,\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\sin x$及$(\sin x)'=\cos x$可将涉及 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的结论互相转化.

646 已知$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$,求$(\cos x)^{(n)}$.

解 $(\cos x)^{(n)}=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{(n)}$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

647 已知$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=e^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C$,求$I=\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$.

解 作代换 $x=y+\pi/2b$,

$$I = e^{a\pi/2b}\int e^{ay}\cos by\,\mathrm{d}y$$
$$= e^{a\pi/2b}e^{ay}\frac{a\cos by + b\sin by}{a^2+b^2} + C$$
$$= e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C.$$

648 已知 $e^x\cos x = \sum_0^\infty 2^{n/2}(x^n/n!)\cos(n\pi/4)$，求 $e^x\sin x$ 的幂级数展开式.

解 利用 $(e^x\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x$：

$$e^x\sin x = e^x\cos x - (e^x\cos x)'$$
$$= \sum_0^\infty\left(2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!} - \sum_1^\infty\left(2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= \sum_0^\infty 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right]\frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_0^\infty\left(2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

649 已知 $\sin^3 x = 4^{-1}(3\sin x - \sin 3x)$，求 $\cos^3 x$ 的类似公式.

解
$$\cos^3 x = \sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left[3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x).$$

以上结果无疑有助于你记住这些公式. 类似的问题尚多，你自己亦不妨仿制一些.

5.10.2 反演

设要求某个量 $\varphi(q)$. 若存在关系 $F(\varphi(q),\varphi(1/q)) = 0$，则可从 $\varphi(1/q)$ 算出 $\varphi(q)$. 因此一旦知道当 $|q| \leqslant 1$ 时 $\varphi(q)$ 的表达式，则 $|q| > 1$ 时的 $\varphi(q)$ 亦随之推出而无需直接计算.

650 求 $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x$.

解　由题641，当 $|q|<1$ 时 $I=\pi/2$. 当 $|q|=1$ 时由直接计算知亦有 $I=\pi/2$. 若 $|q|>1$，则

$$I=I(q)=q^{-2}I(q^{-1})=\pi/2q^2.$$

651　求 $I=\int_0^{\pi}\ln(1-2q\cos x+q^2)\mathrm{d}x$.

解　当 $|q|\leqslant 1$ 时 $I=0$（参考题738）. 若 $|q|>1$，则

$$I=I(q)=\pi\ln q^2+I(q^{-1})=\pi\ln q^2.$$

652　展开 $f(x)=q\sin x/(1-2q\cos x+q^2)(|x|<\pi)$ 为 Fourier 级数，$|q|\neq 1$.

解　当 $|q|<1$ 时，有 $f(x)=\sum_1^{\infty}q^n\sin nx$（参考题641之解）. 若 $|q|<1$ 时，则

$$f(x)=\frac{q^{-1}\sin x}{q^{-2}-2q^{-1}\cos x+1}=\sum_1^{\infty}\frac{\sin nx}{q^n}.$$

653　在 $(-\pi,\pi)$ 上展开 $f(x)=(1-q^2)/(1-2q\cos x+q^2)$ 为 Fourier 级数，$|q|\neq 1$.

解　类似于上题，当 $|q|<1$ 时有

$$f(x)=1+2\sum_1^{\infty}q^n\cos nx.$$

若 $|q|>1$，则

$$f(x)=-\frac{1-q^{-2}}{1-2q^{-1}\cos x+q^{-2}}$$
$$=-1-2\sum_1^{\infty}q^{-n}\cos nx.$$

5.10.3　杂题

654　设 $a>0,\varphi=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fxz,\varphi=1$ 为椭球，求椭球体 $\varphi\leqslant 1$ 的体积 V（参照题401）.

解　设椭球三半轴为 r_1,r_2,r_3，则 $V=4\pi r_1r_2r_3/3$. 因 $r_i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 是 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $\varphi=1$ 之条件下所取的极值，故问题转化为解最大值问题

$$\max(x^2+y^2+z^2), \varphi=1.$$

令 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda\varphi$,则由 $dL=0$ 得出

$$\begin{cases}(\lambda^{-1}+a)x+dy+fz=0,\\ dx+(\lambda^{-1}+b)y+ez=0,\\ fx+ey+(\lambda^{-1}+c)z=0.\end{cases} \tag{5.10.1}$$

要有 $(x,y,z)\neq 0$ 满足以上方程组,必须

$$\begin{vmatrix} t+a & d & f \\ d & t+b & e \\ f & e & t+c \end{vmatrix}=0, \tag{5.10.2}$$

其中 $t=\lambda^{-1}$. 关于 t 的 3 次方程(5.10.2)有三个根 t_1,t_2,t_3,

$$t_1t_2t_3=-abc-2def+ae^2+bf^2+cd^2.$$

由(5.10.1)易得出 $r^2=-\lambda\varphi$,因此

$$\begin{aligned}(r_1r_2r_3)^2&=-(t_1t_2t_3)^{-1}\\&=(abc+2def-ae^2-bf^2-cd^2)^{-1}.\end{aligned}$$

于是 $V=4\pi/3\sqrt{abc+2def-ae^2-bf^2-cd^2}$.

655 求 $l=\lim\limits_{n} n^{-p-1}\sum_1^n k^p (p>0)$.

解 $l=\lim\limits_{n} n^{-1}\sum_1^n (k/n)^p=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=1/(p+1)$.

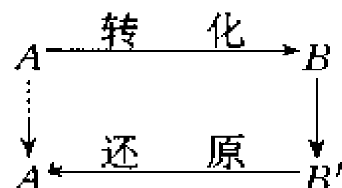
656 求 $\lim\limits_{n} n/\sqrt[n]{n!}$ $(=e)$.

657 求椭圆 $a^{-2}x^2+b^{-2}y^2+c^{-2}z^2=1, Ax+By+Cz+D=0$ 之中心.

解 问题可转化为:在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上求一点,使 $Ax+By+Cz+D=0$ 在该点与一椭球面 $a^{-2}x^2+b^{-2}y^2+c^{-2}z^2=r(0<r<1)$ 相切. 由条件 $\{a^{-2}x,b^{-2}y,c^{-2}z\}\parallel\{A,B,C\}$ 不难求得所要点为 $(a^2A\lambda,b^2B\lambda,c^2C\lambda)$, $\lambda=-D/(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)$.

第六章　RMI 原则

让我们暂时离开数学，分析现代技术中一种普遍发生的过程. 给定信号 A（如物象），将 A 转化为另一类信号 B（如电波），B 经某种处理（如传输、接收、调整等）后变为 B'，然后 B' 被还原为第一类信号 A'（如图象）. 以上过程可图示为：



这一过程的最终目标显然是 $A \to A'$，但这常常无法或难以直接达到，于是设计一条如上图所示的迂回路径 $A \to B \to B' \to A'$ 间接地实现.

你不难举出许多类似的具体例子. 但这与解数学题有何关系呢？那么让我们将前面的分析修改得稍"数学化"一点：设要将 A 施以"变换"T 变为 A'，即 $A' = TA$. 今将问题转化为对 A 作"变换"S 变为 B；再经"变换"T 变成 B'；再经一"逆变换"S^{-1} 变成所要的 A'. 表为式子就是 $B = SA, B' = TB, A' = S^{-1}B'$，于是整个过程可表为

$$A' = TA = S^{-1}TSA. \tag{6.1}$$

现在只需对 A, T, S 等作某种新的解释，就可将(6.1)用于解数学题了.

假定 T, S 是某种演算，此处"演算"一词在广义的意义上使

用，例如可以指求极限、求导、求积分、级数求和、级数展开、部分分式分解、变量代换等等；S^{-1} 表 S 的“逆运算”；A 是演算对象（如函数、序列、级数等）.（6.1）式意味着：对 A 相继施以演算 S，T，S^{-1} 的结果与仅作演算 T 相当. 换言之，（6.1）式将求 TA 转化成求 $S^{-1}TSA$，后者可能要容易些. 这种转化程序称为“RMI原则”，是数学中的基本原则之一.

（6.1）式在数学上的合理性基于以下推演：

$$TA = TS^{-1}SA = S^{-1}TSA \tag{6.2}$$

或

$$TA = TSS^{-1}A = STS^{-1}A. \tag{6.3}$$

而（6.2）与（6.3）的合理性又基于交换演算顺序的合理性：$ST = TS (\Leftrightarrow S^{-1}T = TS^{-1})$. 这一合理性基于一定的数学理论（如极限互换定理）与问题中给定的条件. 在（6.2）（6.3）中，T 由题意决定，而 S 则是人为选定的，通常取 S 为求导、积分或取对数等.

6.1 对数的应用

取对数可降低某些表达式（如乘积与幂）的复杂性，这是一熟知的事实. 给定一个量 $Q > 0$，有

$$Q = e^{\ln Q}. \tag{6.1.1}$$

现在的问题是，若 T 是某种演算，能否利用（6.1.1）来简化 TQ 的计算？本节考虑三种情况.

6.1.1 求极限

利用（6.1.1）求极限基于以下公式：

$$\lim f(x) = \exp[\lim \ln f(x)]. \tag{6.1.2}$$

当 f 是“幂指数式”，即 $f = u^v$ 时，通常以用（6.1.2）式为宜. 若与其它方法结合使用，则效果更好.

658 求 $l=\lim\limits_{x\to\infty}[(e^x+e^{-x})/(e^x-e^{-x})]^{e^{2x}}$.

解 取对数并令 $t=e^{-2x}$：

$$\ln l=\lim_{t\to 0}t^{-1}[\ln(1+t)-\ln(1-t)]=2,$$

故得 $l=e^2$.

659 求 $l=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\mathrm{tg}x)/(1+\sin x)]^{1/\sin x}$.

解 取对数并注意 $\mathrm{tg}x\sim\sin x(x\to 0)$：

$$\ln l=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{tg}x)-\ln(1+\sin x)}{\sin x}=0,$$

因此 $l=1$.

660 求 $l=\lim\limits_{x\to 0}[e^{-1}(1+x)^{1/x}]^{1/x}$.

解 取对数：

$$\ln l=\lim_{x\to 0}x^{-2}[\ln(1+x)-x]=-\frac{1}{2},$$

因此 $l=1/\sqrt{e}$.

661 求 $l=\lim\limits_{x\to 0}(x^{-1}\arcsin x)^{1/x^2}$.

解 取对数并令 $x=\sin t$：

$$\begin{aligned}\ln l&=\lim_{x\to 0}x^{-2}\ln\left(\frac{t}{\sin t}\right)\\&=\lim_{t\to 0}t^{-2}\ln\left(\frac{t}{\sin t}\right)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

故得 $l=\sqrt[6]{e}$.

662 求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 取对数并用 $\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$：

$$\ln l=\lim_{x\to 0}x^{-2}\ln\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{-2}(\cos x - \operatorname{ch} x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - \operatorname{ch} x}{2} = -1,$$

因此 $l = e^{-1}$.

6.1.2 求导数

利用(6.1.1)求导基于以下公式:

$$f'(x) = f(x)[\ln f(x)]'. \qquad (6.1.3)$$

663 设 $f(x) = (a/b)^x(b/x)^a(x/a)^b(a,b,x > 0)$, 求 $f'(x)$.

解 直接用公式(6.1.3)而避用 Leibniz 规则:

$$f'(x) = f(x)\left[x\ln\left(\frac{a}{b}\right) + a\ln\left(\frac{b}{x}\right) + b\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right]'$$

$$= f(x)\left[\ln\left(\frac{a}{b}\right) - ax^{-1} + bx^{-1}\right].$$

664 设 $f(x) = \sqrt[m+n]{(1+x)^m(1-x)^n}$, 求 $f'(x)$.

解 $f'(x) = f(x)\left[\frac{m}{m+n}\ln(1+x)\right.$

$$\left. + \frac{n}{m+n}\ln(1-x)\right]'$$

$$= \frac{f(x)}{m+n}\left(\frac{m}{1+x} - \frac{n}{1-x}\right).$$

665 设 $f(x) = \prod_1^n (x - a_i)^{\beta_i}$, 求 $f'(x)$.

解 $f'(x) = f(x)\left[\sum_1^n \beta_i \ln(x - a_i)\right]' = \frac{f(x)\sum_1^n \beta_i}{x - a_i}$.

666 设 $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{1/\sin^2 x}$, 求 $f'(x)$.

解 $f'(x) = f(x)\left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}\right)'$

$$= f(x)\,\frac{\operatorname{tg} x - \sin 2x \ln \operatorname{tg} x}{\sin^4 x}.$$

对于多元函数的微分计算,可用类似于(6.1.3)的公式:$\mathrm{d}u$

$= u\mathrm{d}(\ln u).$

667　设 $u = x^{y/z}$，求 $\mathrm{d}u$.

解　$\mathrm{d}u = u\mathrm{d}(z^{-1}y\ln x)$

$$= u(x^{-1}yz^{-1}\mathrm{d}x + z^{-1}\ln x\mathrm{d}y - yz^{-2}\ln x\mathrm{d}z).$$

作为对比，你可以依公式 $\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y + u_z\mathrm{d}z$ 计算上题中的 $\mathrm{d}u$.

668　设 $u = \sqrt[z]{xy}$，求 $\mathrm{d}u$.

解　类似于上题，

$$\mathrm{d}u = u\left[x^{-1}z^{-1}\mathrm{d}x - y^{-1}z^{-1}\mathrm{d}y - z^{-2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}z\right].$$

6.1.3　无穷乘积

将(6.1.1)用到无穷乘积，得到公式：

$$\prod_1^\infty a_n = \exp\left(\sum_1^\infty \ln a_n\right) \quad (a_n > 0). \qquad (6.1.4)$$

当 $\lim\limits_n \prod_1^n a_k$ 存在有限且非零时说 $\prod_1^\infty a_n$ 收敛. (6.1.4) 表明 $\prod a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum \ln a_n$ 收敛.

669　设 $\sum a_n^2$ 收敛，证明 $\prod \cos a_n$ 收敛.

证　由 $\sum a_n^2$ 收敛及

$$\ln\cos a_n = \ln(1 - 2^{-1}a_n^2 + o(a_n^2)) = O(a_n^2)$$

知 $\sum \ln\cos a_n$ 收敛，从而 $\prod \cos a_n$ 收敛.

670　设 $|a_n| < \pi/4$，$\sum |a_n|$ 收敛，证明 $\prod \mathrm{tg}(a_n + \pi/4)$ 收敛.

提示：类似于上题.

671　求 $P = \prod_1^\infty a^{(-1)^n/n} \quad (a > 0)$.

解　依(6.1.4)，$P = \exp\left(\sum_1^\infty (-1)^n n^{-1}\ln a\right) = a^{-\ln 2}$.

672　设 $f_n \in C(a,b)$，$|f_n(x)| \leqslant b_n$，$\sum b_n$ 收敛，证明 $P(x)$

$= \prod_1^\infty [1 + f_n(x)]$ 在 (a,b) 内连续.

证 可设 $|f_n(x)| < 1/2$，由不等式(见题 768) $t - 2t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t(|t| < 1/2)$ 推出 $-b_n - 2b_n^2 \leqslant \ln[1 + f_n(x)] \leqslant b_n$，因而 $\sum \ln[1 + f_n(x)]$ 一致收敛，从而 $P(x) = \exp\{\sum_1^\infty \ln[1 + f_n(x)]\}$ 连续.

673 设 $|f_n'(x)| \leqslant b_n$，$\sum |f_n(x)|$ 与 $\sum b_n$ 收敛，$P(x) = \prod_1^\infty [1 + f_n(x)]$，证明 $P'(x) = P(x) \sum_1^\infty f_n'(x)/[1 + f_n(x)]$.

6.2 级数展开问题

设要求给定函数 $f(x)$ 关于 x 的幂级数. 若不易直接展开 $f(x)$，就转而考虑展开 $f'(x)$ 或 $f(x)$ 某个原函数，这是 RMI 原则的典型应用之一.

6.2.1 展开导数

若 $f'(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$，则由 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$f(x) = f(0) + \sum_1^\infty b_{n-1} n^{-1} x^n. \qquad (6.2.1)$$

因在很多情况下 $f'(x)$ 较 $f(x)$ 为简单(如 $f(x)$ 含 $\ln x$，$\arcsin x$ 等时即如此)，故利用(6.2.1)求展开式是一种重要方法.

674 展开 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 为 x 的幂级数.

解 $f(0) = 0$，而 $f'(x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$ 不难展开，故易得

$$f(x) = x + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leqslant 1).$$

675 展开 $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x})$ 为 x 的幂级数.

解 类似于上题：

$$f(x)=\ln 2+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{n}}{2n}\quad(|x|\leqslant 1).$$

676 展开 $f(x)=x\ln x(x+\sqrt{1+x^{2}})-\sqrt{1+x^{2}}$ 为 x 的幂级数.

解 因 $f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$，$f(0)=-1$，故用题 674 得

$$f(x)=-1+\frac{x^{2}}{2}+\sum_{1}^{\infty}(-1)\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)}.$$

$$(|x|\leqslant 1)$$

677 展开 $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^{2})$ 为 x 的幂级数.

解 首先利用 $f'(x)=(x-e^{i\alpha})^{-1}-(x-e^{-i\alpha})^{-1}$ 得出

$$f'(x)=-2\sum_{0}^{\infty}x^{n}\cos(n+1)\alpha,$$

于是 $$f(x)=-2\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^{n}\quad(|x|\leqslant 1).$$

678 展开 $f(x)=\arcsin x$ 为 x 的幂级数.

解 利用 $f'(x)=1/\sqrt{1-x^{2}}$，类似于题 674 有

$$f(x)=x+\sum_{1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|\leqslant 1).$$

679 展开 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$ 为 x 的幂级数.

解 算出 $f'(x)=2/(1+4x^{2})$，然后得：

$$f(x)=\operatorname{arctg}2+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n}2^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad\left(|x|\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

注 实际上，由三角公式知 $f(x)=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}2x$，因此利用 $\operatorname{arctg}x=\sum_{0}^{\infty}(-1)x^{2n+1}/(2n+1)$ 立得以上展开式.

680 展开 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{4+x^{2}}{4-x^{2}}$ 为 x 的幂级数.

解 利用 $f'(x)=8x/(16+x^{4})$ 或 $f(x)=(\pi/4)+\operatorname{arctg}(x^{2}/4)$，

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{0}^{\infty}(-1)^n 2^{-4n-2}x^{4n-2}/(2n+1) \quad (|x| \leqslant 2).$$

681 展开 $f(x) = \operatorname{arctg}[2x/(2-x^2)]$ 为 x 的幂级数.

解 利用 $f'(x) = (4+2x^2)/(4+x^4)$ 的展开式得：

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}2^{-n}x^{2n+1}\Big/(2n+1)$$

$$(|x| \leqslant \sqrt{2}).$$

682 展开 $f(x) = \arccos(1-2x^2)$ 为 x 的幂级数.

解 因 $f'(x) = 2\operatorname{sgn}x/\sqrt{1-x^2}$，故

$$f(x) = 2|x|\left[1 + \sum_{1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n}}{2n+1}\right] \quad (|x| \leqslant 1).$$

683 展开 $f(x) = 4^{-1}\ln[(1+x)/(1-x)] + 2^{-1}\operatorname{arctg}x$ 为 x 的幂级数.

解 组合 $\ln(1+x)$，$\ln(1-x)$ 与 $\operatorname{arctg}x$ 的展开式可得本题结论. 不过，若求出 $f'(x) = 1/(1-x^4)$，则直接有

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)} \quad (|x| < 1).$$

类似的考虑亦适用于下题.

684 展开 $f(x) = x\operatorname{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}$ 为 x 的幂级数.

解 $f'(x) = \operatorname{arctg}x$，

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}/2n(2n-1) \quad (|x| \leqslant 1).$$

6.2.2 展开原函数

若 $f(x) = F'(x)$，$F(x) = \sum_{0}^{\infty}b_n x^n$，则

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n. \qquad (6.2.2)$$

原函数 $F(x)$ 不易求出，且通常未必比 $f(x)$ 更易展开，因此利用 (6.2.2) 的机会要少些.

685 展开 $f(x) = (1-x)^{-2}$ 为 x 的幂级数.

解 直接由以下演算得出：

$$f(x)=[(1-x)^{-1}]'=(\sum_0^\infty x^n)'$$
$$=\sum_0^\infty (n+1)x^n \quad (|x|<1).$$

686 展开 $f(x)=(1-x)^{-3}$ 为 x 的幂级数.

解 类似于上题,注意 $f(x)=2^{-1}[(1-x)^{-1}]''$,

$$f(x)=\sum_0^\infty 2^{-1}(n+1)(n+2)x^n \quad (|x|<1).$$

做过以上两题之后,对于更一般的问题,如展开 $(Ax+B)/(x-a)^m(a\neq 0)$,你应当也能对付.

687 展开 $f(x)=(1-x^2)^2(1+x^2)^{-2}$ 为 x 的幂级数.

解 此题关键在于看出 $f(x)=[x/(1+x^2)]'$,余下的事情就很简单:

$$f(x)=[\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n+1}]'$$
$$=\sum_0^\infty (-1)^n(2n-1)x^{2n} \quad (|x|<1).$$

你应能解类似的问题:

688 展开 $f(x)=(1+x^2)(1-x^2)^{-2}$ 为 x 的幂级数.

结果:$f(x)=\sum_0^\infty (2n+1)x^{2n}(|x|<1)$.

注 以 ix 代 x,题 688 可转化为题 687.

689 展开 $f(x)=e^{-x^2}(2x-2x^3)$ 为 x 的幂级数.

解 只要看出 $f(x)=(x^2e^{-x^2})'$,就有:

$$f(x)=\left[\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{n!}\right]'$$
$$=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(2n+2)}{n!}x^{2n+1} \quad (|x|<\infty).$$

类似地可解下题:

690 展开 $f(x)=e^{-x^3}(2x-3x^4)$ 为 x 的幂级数.

结果:$f(x)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(3n+2)}{n!}x^{3n+1} \quad (|x|<\infty)$.

691 展开 $f(x)=\sin x^2+2x^2\cos x^2$ 为 x 的幂级数.

结果：$f(x)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(4n+3)}{(2n+1)!}x^{4n+2}\quad(|x|<\infty)$.

注　题 689～691 当然亦可以这样解：表 $f(x)$ 为 $g(x)+h(x)$，展开 $g(x)$ 与 $h(x)$ 后再合并其展开式. 就这类题而言，展开原函数的方法好处并不明显.

6.2.3　杂例

举两个综合运用多种方法的例子.

692　展开 $f(x)=x\mathrm{arctg}[x/(1+x)]+(1+x+x^2)^{-1}$ 为 x 的幂级数.

解　首先注意$\{\mathrm{arctg}[x/(1+x)]\}'=(2x^2+2x+1)^{-1}$，而

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x^2+2x+1}&=i\left(\frac{1}{1+i+2x}-\frac{1}{1-i+2x}\right)\\&=i\sum_0^\infty(-1)^n2^n[(1+i)^{-n-1}-(1-i)^{-n-1}]x^n\\&=\sum_0^\infty(-1)^n2^{(n+1)/2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}x^n.\end{aligned}$$

其次，

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_0^\infty x^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)=1-x+\sum_2^\infty\Big[&\frac{(-1)^n}{n-1}2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}+\\&\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}\Big]x^n\quad(|x|<1/\sqrt{2}).\end{aligned}$$

693　展开 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{(1-x)^4}+x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为 x 的幂级数.

解　综合 6.2.1 与 6.2.2 的方法：

$$f(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'-x\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= \left(\sum_1^{\infty} nx^n\right)'$$

$$- x\int_0^x \left[1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}\right] dt$$

$$= \sum_0^{\infty} (n+1)^2 x^n - x^2$$

$$+ \sum_2^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{x^{2n}}{2n-1} \quad (|x| < 1).$$

6.3 级数求和问题

在一定意义上，"求和"是"展开"的逆运算. 因此，"倒过来"使用上节的方法就很自然了. 简单地说，倘要求 $S(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ 而不易直接完成，则可试求 $S'(x) = \sum_1^{\infty} na_n x^{n-1}$ 或 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_1^{\infty} a_{n-1} x^n / n$，然后经一次积分或求导得出 $S(x)$.

6.3.1 逐项微分求和

这指的是基于以下公式的求和法：

$$S(x) = a_0 + \int_0^x \sum_1^{\infty} (a_n t^n)' \, \mathrm{d}t. \qquad (6.3.1)$$

方法的效果取决于 $\sum_1^{\infty} na_n x^{n-1}$ 是否容易求和；而这又取决于 na_n 是否是 a_n 的一个简化. 当 $a_n = 1/P(n)$，$P(n)$ 为多项式且含因子 n 时，na_n 已变简单些了；相继运用公式(6.3.1)，可能求出某个 $S^{(k)}(x)$，从而通过 k 次积分得出 $S(x)$.

694 求 $S(x) = \sum_0^{\infty} x^{2n}/(4n+1)$.

解 关键在于约去通项分母 $4n+1$，为此必须在通项中出现自变量的 $4n+1$ 次方，因此只有改造级数后才适于逐项微分. 令 $|x| = y^2$，则 $yS(x) = \sum_0^{\infty} y^{4n+1}/(4n+1)$，$(yS)'_y = \sum_0^{\infty} y^{4n} = 1/(1-y^4)$. 于是

$$S(x)=\frac{1}{y}\int_0^y\frac{dt}{1-t^4}=\frac{1}{4y}\left(\ln\frac{1+y}{1-y}+2\operatorname{arctg}y\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{|x|}}\left(\ln\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{|x|}\right)$$

$$(|x|<1).$$

当 $x=0$ 时上式应在极限意义上理解(下文仿此).

现在让你利用解上题的经验求解类似的问题:

695 求 $S(x)=\sum_0^\infty(-1)^n x^{2n}/(4n+3)$.

解 令 $y=\sqrt{|x|}$,则 $S(x)=y^{-3}\sum_0^\infty(-1)^n y^{4n+3}/(4n+3)$,结果:

$$S(x)=\frac{1}{4|x|\sqrt{2|x|}}\left(\ln\frac{|x|-\sqrt{2|x|}+1}{\sqrt{|x|+\sqrt{2|x|}+1}}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2|x|}}{1-|x|}\right)\quad(|x|\leqslant 1).$$

若 $a_n=1/P(n)$,P 是二次多项式,则"约去"$P(n)$ 需经两次微分.自然微分之前须适当改造级数.

696 求 $S(x)=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}x^{2n}/n(2n-1)$.

解 因 $S''(x)=2\sum_0^\infty(-x^2)^n=2/(1+x^2)$,$S(0)=S'(0)=0$,故

$$S(x)=\int_0^x dy\int_0^y\frac{2dz}{1+z^2}=2\int_0^x\operatorname{arctg}y\,dy$$

$$=2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)\quad(|x|\leqslant 1).$$

697 求 $S(x)=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}x^{3n}/n(3n+1)$.

解 类似于上题:$[xS(x)]''=3x^2/(1+x^3)$,

$$S(x)=\frac{1}{x}\int_0^x dy\int_0^y\frac{3z^2}{1+z^3}dz=\frac{1}{x}\int_0^x\ln(1+y^3)dy$$

$$=\ln(1+x^3)-3+\frac{3}{x}\int_0^x\frac{dy}{1+y^3}$$

$$= \ln(1+x^3) - 3 + \frac{1}{2x}\left[\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right.$$

$$\left. + 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right] (|x| \leqslant 1).$$

698 求 $S(x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} x^{2n-1}/(4n^2-1)$.

解 $4n^2 - 1 = (2n+1)(2n-1)$，应依次约去 $2n+1, 2n-1$：

$$(x^{-1}(x^2 S(x))')' = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} = (1+x^2)^{-1};$$

$$S(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x y\mathrm{d}y\int_0^y \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{1}{x^2}\int_0^x y\operatorname{arctg} y\mathrm{d}y$$

$$= 2^{-1}(1+x^{-2})\operatorname{arctg} x - (2x)^{-1} \quad (|x| \leqslant 1).$$

699 求 $S(x) = \sum_2^\infty (-1)^n x^n/(n^2+n-2)$.

解 $n^2 + n - 2 = (n+2)(n-1)$，仿上题：

$$\{x^{-2}[x^2 S(x)]'\}' = \sum_2^\infty (-1)^n x^{n-2}$$

$$= (1+x)^{-1};$$

$$S(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^y y^2\mathrm{d}y\int_0^y \frac{\mathrm{d}z}{1+z}$$

$$= \frac{3^{-1}(x+x^{-2})\ln(1+x) - (2x+6x^{-1}-3)}{18}$$

$$(|x| \leqslant 1).$$

700 求 $S(x) = \sum_1^\infty \frac{(n-1)!+3n+1}{n!(3n+1)} x^{3n}$.

解 本题应分解为两个级数求和：

$$S(x) = \sum_1^\infty \frac{x^{3n}}{n(3n+1)} + \sum_1^\infty \frac{x^{3n}}{n!}$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \sum_1^\infty \frac{t^{3n}}{n}\mathrm{d}t + e^{x^3} - 1$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^x \ln(1-t^3)\mathrm{d}t + e^{x^3} - 1$$

$$= -\ln(1-x^3)$$

$$+\frac{1}{2x}\left[\ln\frac{(1-x^2)}{1+x+x^2}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$$

$$+e^{x^3}-2\quad(|x|\leqslant 1).$$

6.3.2 逐项积分求和

现在考虑与(6.3.1)"相反"的求和公式：

$$S(x)=\left(\sum_0^\infty\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t\right)'. \qquad (6.3.2)$$

通常无需明显施行逐项积分，只需记住公式：

$$\sum_1^\infty nx^{n-1}=\left(\frac{1}{1-x}\right)',\ \sum_2^\infty n(n-1)x^{n-2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'',\cdots.$$

当 $a_n=P(n)$ 为多项式时，应分解 $P(n)$ 为 $n, n(n+1)$ 等式子的组合.

701 求 $S(x)=\sum_0^\infty(n+1)^2x^n$.

解 由分解 $(n+1)^2=(n+2)(n+1)-(n+1)$ 有

$$S(x)=\left(\sum_0^\infty x^{n+2}\right)''-\left(\sum_0^\infty x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)''-\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{1+x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$$

702 求 $S(x)=\sum_1^\infty n^2 2^{-n}x^{2n-1}$

解 令 $y=x^2/2$ 并用分解 $n^2=(n+1)n-n$：

$$S(x)=\frac{x}{2}\left[\left(\sum_0^\infty y^{n+1}\right)''-\left(\sum_0^\infty y^n\right)'\right]$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1+y}{(1-y)^3}=\frac{2x(2+x^2)}{(2-x^2)^3}\quad(|x|<\sqrt{2}).$$

703 求 $S(x)=\sum_1^\infty(-1)^n n(n+2)3^{-n/2}x^{3n+1}$.

解 类似于上题，令 $y=-x^3/\sqrt{3}$，

$$S(x)=x\left[\left(\sum_0^\infty y^{n+2}\right)''-\left(\sum_0^\infty y^{n+1}\right)'-\sum_0^\infty y^n\right]$$

$$= \frac{x(3y - y^2)}{(1 - y)^3} = \frac{\sqrt{3}\, x^4 (x^3 + 3\sqrt{3})}{(x^3 + \sqrt{3})^3} \quad (|x| < \sqrt[6]{3}).$$

以上两题的解法启示你去解更一般的问题：

704 求 $S(x) = \sum_0^{\infty} (a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m) x^n$.

解 令 $\sum_0^m a_i x^i = b_0 + \sum_1^m b_i (x+1)\cdots(x+i)$，取 $x = -k$ 得

$$\begin{cases} \sum_0^m a_i (-k)^i = b_0 + \sum_1^{k-1} (-1)^i b_i (k-1) \\ \qquad (k-2)\cdots(k-i), \quad k = 1, 2, \cdots, m; \\ a_0 = b_0 + \sum_1^m i!\, b_i. \end{cases} \qquad (6.3.3)$$

以上 $m+1$ 个方程完全决定 $b_i (0 \leqslant i \leqslant m)$. 于是

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_0^{\infty} b_0 x^n + \sum_{i=1}^{m} b_i \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdots(n+i) x^n \\ &= b_0 \sum_0^{\infty} x^n + \sum_{i=1}^{m} b_i \Big(\sum_0^{\infty} x^{n+i} \Big)^{(i)} \\ &= \frac{b_0}{1-x} + \sum_1^m b_i \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(i)} \\ &= \sum_0^m \frac{b_i\, i!}{(1-x)^{i+1}} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

705 求 $S(x) = \sum_0^{\infty} (n^3 + n + 1) x^n$.

解 用上题：由(6.3.3)有($a_0 = a_1 = a_2 = 1, a_2 = 0$)：

$$\begin{cases} -1 = b_0, \ -9 = b_0 - b_1, \\ -29 = b_0 - 2b_1 - 2b_2, \\ 1 = b_0 + b_1 + 2b_2 + 6b_3. \end{cases}$$

解出 $b_0 = -1, b_1 = 8, b_2 = -6, b_3 = 1$，于是

$$S(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{8}{(1-x)^2} - \frac{12}{(1-x)^3} + \frac{6}{(1-x)^4}.$$

706 求 $S(x)=\sum_1^{\infty}(n!+1)2^{-n}x^n/(n-1)!$

解 $S(x)=\sum_1^{\infty}n\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{x}{2}\sum_0^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$=\frac{x}{2}\left[\frac{4}{(2-x)^2}+e^{x/2}\right]\quad(|x|<2).$$

6.3.3 数项级数求和

为求 $S=\sum b_n$，可将它表为 $S=\sum a_n r^n$；以 x 代 r，用前两段的方法求出 $S(x)=\sum a_n x^n$，然后取 $x=r$ 得 $S=S(r)$. 实际演算时可将"引入变元 x"与"代入数值 $x=r$"两步合并，采用以下算式：

$$S=\sum a_n x^n\Big|_{x=r}=S(r).$$

707 求 $S=\sum_1^{\infty}(-1)^n 2^{-n}n(n+1)$.

解 $S=-\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}(n+1)nx^{n-1}\Big|_{x=-1/2}=-\frac{8}{27}$.

708 求 $S=\sum_1^{\infty}(-1)^n 3^{-n}n^2$.

解 $S=-\frac{1}{3}\sum_1^{\infty}[(n+1)n-n]x^{n-1}\Big|_{x=-1/3}=-\frac{3}{32}$.

注意以上解法中 $S(x)$ 仅中途出现.

709 求 $S=\sum_0^{\infty}(n^2+n+1)2^{-n}\quad(=10)$.

如果用6.3.1 的方法，则完全不必求出 $S(x)$，只需用公式

$$S=S(r)=S(0)+\int_0^r S'(x)\mathrm{d}x.$$

710 求 $S=\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}/(3n-2)$.

解 用 $(3n-2)^{-1}=\int_0^1 x^{3n-3}\mathrm{d}x$：

$$S=\int_0^1\sum_1^{\infty}(-x^3)^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

711 求 $S=\sum_0^{\infty}(-1)^n/(3n+2)\quad\left(=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{\ln 2}{3}\right)$.

712 求 $S = 1 + \sum_1^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$

解 $S = \int_0^1 \left[1 + \sum_1^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\right] dx$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

6.4 积分计算问题

微积分学中一个有重大意义的基本事实是，积分与级数在很多方面可以相类比(参照 2.2.3)．认识到这一点，你就自然力图将解级数问题的方法移用于积分问题，这样做往往能获得成功．现在就让我们将上节中的方法推广于积分计算．

设要求"参变积分"$I(a) = \int_\alpha^\beta f(x,a)dx$ 而不易直接完成．类比于上节中的"逐项微分求和"与"逐项积分求和"，此处考虑"积分号下微分"与"积分号下积分"的积分计算法；简言之，即对参数 a 的微分法与积分法，所用公式恰与上节式(6.3.1)(6.3.2)相对应．

6.4.1 对参数微分法

此方法基于公式(参照上节式(6.3.1)：

$$I(a) = I(a_0) + \int_{a_0}^a dy \int_\alpha^\beta f_y(x,y)dx, \qquad (6.4.1)$$

其中 a_0 应取得使 $I(a_0)$ 容易算出，最好是 $I(a_0) = 0$．应用公式(6.4.1)的效果取决于积分 $\int_\alpha^\beta f_y(x,y)dx$ 是否便于计算；而这又取决于 $f_y(x,y)$ 是否是 $f(x,y)$ 的一个简化．当 f 是对数函数、反三角函数一类的函数时，使用公式(6.4.1)通常有明显效果．现在就来看一些例子．

713 求 $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2x+a^2\cos^2x)\mathrm{d}x(a>0)$.

解 令 $I=I(a)$，显然 $I(1)=0$. 由(6.4.1)有

$$I=\int_1^a\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{2y\cos^2x}{\sin^2x+y^2\cos^2x}\mathrm{d}x$$

$$(t=\mathrm{tg}x)\qquad =\int_1^a 2y\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(y^2+t^2)(1+t^2)}$$

$$=\pi\int_1^a\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=\pi\ln\frac{1+a}{2}.$$

714 求 $I=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x(|a|\neq 1)$.

解 类似于上题，

$$I=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\pi}\frac{2(y-\cos x)}{1-2y\cos x+y^2}\mathrm{d}x$$

$$(\text{用题 477})\qquad =\pi\int_0^a\left(1+\frac{y^2-1}{|y^2-1|}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

因此，当 $|a|<1$ 时 $I=0$；当 $|a|>1$ 时 $I=\pi\ln a^2$.

715 求 $I=\int_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x(|a|\leqslant 1)$.

解 令 $I=I(a)$，则 $I(0)=0$，于是

$$I=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^1\frac{-2y}{(1-y^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\left(t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\qquad =-2\int_0^a y\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1-y^2)t^2+1}$$

$$=\pi(\sqrt{1-a^2}-1).$$

类似地你可解：

716 求 $I=\int_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x(|a|\leqslant 1)$.

$\left(I=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\right)$.

717 求 $I=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}(ax)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

$\left(=\frac{\pi}{2}(1+|a|-\sqrt{1+a^2})\mathrm{sgn}a\right)$.

718 求 $I=\int_0^{\pi/2}(\mathrm{tg}x)^{-1}\mathrm{arctg}(a\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$.

解 令 $I=I(a)$,则 $I(0)=0$,于是

$$I=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y^2\mathrm{tg}^2x}$$

$$(t=\mathrm{tg}x)\qquad =\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+y^2t^2)(1-t^2)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a\ln(1+|a|).$$

若积分含两个参数 a,b,首先应考虑能否化为一个参数的情况.

719 求 $I=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\ln\frac{b+a\sin x}{b-a\sin x}\mathrm{d}x(0<a<b)$.

解 令 $I=I(k)$,$k=a/b$,则

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+k\sin x}{1-k\sin x}\mathrm{d}x$$

$$(t=\mathrm{tg}x)\qquad =\int_0^k\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{2\mathrm{d}x}{1-y^2\sin^2x}$$

$$=\int_0^k\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1-y^2}$$

$$=\int_0^k\frac{\pi\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin\frac{a}{b}.$$

其次,可考虑对每个参数微分的方法.

720 求 $I=\int_0^{\infty}x^{-2}\mathrm{arctg}ax\mathrm{arctg}bx\mathrm{d}x(a,b>0)$.

解 令 $I=I(a,b)$,则 $I(0,b)=I'_b(a,0)=0$,于是

$$I=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^b I''_{yz}(y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^b \mathrm{d}z \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)(1+x^2z^2)}$$
$$= 2^{-1}\pi[(a+b)\ln(a+b) - a\ln a - b\ln b].$$

你试做一个类似的问题：

721 求$I = \int_0^\infty x^{-4}\ln(1+a^2x^2)\ln(1+b^2x^2)\mathrm{d}x (a,b>0)$.

结果：$I = \frac{2\pi}{3}\left(a^2b + ab^2 - a^3\ln\frac{a+b}{a} - b^3\ln\frac{a+b}{b}\right)$.

适当的分项积分，亦可将两参数积分归于单参数的情况.

722 求$I = \int_0^\infty x^{-2}(e^{-ax^2} - \cos bx)\mathrm{d}x (a,b>0)$.

解 首先考虑仅含参数 a 的积分：

$$\int_0^\infty x^{-2}(e^{-ax^2} - 1)\mathrm{d}x = -\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^\infty e^{-x^2y}\mathrm{d}x$$
$$= -\sqrt{\pi}\int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = -\sqrt{a\pi}.$$

其次，类似地算出$\int_0^\infty x^{-2}(1-\cos bx)\mathrm{d}x = b\pi/2$，于是$I = (b\pi/2) - \sqrt{a\pi}$.

某些不含参数的积分可通过引入参数然后对参数微分的方法计算，如同数项级数可通过幂级数求和一样（参看 6,3.3）.

723 求$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 此题的困难是$\operatorname{arctg}x$引起的，因此代以$\operatorname{arctg}ax$，寄希望于对 a 微分后消去反正切函数. 于是令$I(a) = \int_0^1 (\operatorname{arctg}ax/x\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$. 类似于题 717，

$$I = I(1) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left(t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+(1+y^2)t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

6.4.2 一种典型情况

若 $I = \int_\alpha^\beta \varphi(x)[f(x,a_2) - f(x,a_1)]\mathrm{d}x$，则可用公式：

$$I = \int_{a_1}^{a_2}\mathrm{d}y\int_\alpha^\beta \varphi(x) f'_y(x,y)\mathrm{d}x. \qquad (6.4.2)$$

公式(6.4.2)可看作是(6.4.1)的一个变种.(6.4.2)的适用情况具明显特征，因而比较容易把握.

724 求 $I = \int_0^\infty x^{-1}(e^{-ax} - e^{-bx})\sin mx\mathrm{d}x (m\neq 0, a, b > 0)$.

解 直接用公式(6.4.2)

$$I = -\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}(e^{-xy})'_y\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-xy}\sin mx\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \frac{m}{y^2+m^2}\mathrm{d}y = \operatorname{arctg}\frac{b}{m} - \operatorname{arctg}\frac{a}{m}.$$

725 求 $\int_0^\infty x^{-1}(e^{-ax^2} - e^{-bx^2})\mathrm{d}x \quad \left(=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a} a, b > 0\right)$.

726 求 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x (a, b > 0)$.

解 用(6.4.2)并作代换 $t = -\ln x$：

$$I = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin(-\ln x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-(y+1)t}\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}.$$

727 求 $I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{(x+1)\ln x}\mathrm{d}x (0 < a, b < 1)$.

解 用(6.4.2)并参考题67：

$$I=\int_b^a\mathrm{d}y\int_0^\infty x^{y-1}(1+x)^{-1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_b^a B(1-y,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_b^a\frac{\pi}{\sin\pi y}\mathrm{d}y=\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{a\pi}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{b\pi}{2}}\right|.$$

728 求$I=\int_0^\infty x^{-1}(\cos ax-\cos bx)\mathrm{d}x\,(a,b>0)$.

解 初看之下，此题不过照搬前面的方法而已．碰到不收敛的积分$\int_0^\infty\sin xy\mathrm{d}x$之后，你才意识到老办法行不通．幸而有一个引进"收敛因子"$e^{-\lambda x}(\lambda>0)$的补救办法：

$$I(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{-1}(\cos ax-\cos bx)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin xy\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\frac{y\mathrm{d}y}{y^2+\lambda^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+\lambda^2}{a^2+\lambda^2},$$

于是$I=I(0)=\ln(b/a)$.

729 求$I=\int_0^\infty(1+x^2)^{-1}\cos ax\mathrm{d}x$.

解 此题表面上不属本段类型，但注意到$1=\exp[-y(1+x^2)]\big|_{y=\infty}^{y=0}$之后，就可以沿用老办法：

$$I=\int_0^\infty\mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}\cos ax\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\infty e^{-y}\mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-x^2y}\cos ax\mathrm{d}x$$

(用题152)

$$=\int_0^\infty e^{-y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\exp\left(-\frac{a^2}{4y}\right)\mathrm{d}y$$

(用题 153)　　　　$= \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$.

6.4.3　对参数积分法

与公式(6.4.1)相对而与上节(6.3.2)相当的公式是：

$$I(\alpha) = \left(\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,y)\mathrm{d}y\right)'_\alpha. \qquad (6.4.3)$$

因以$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,y)\mathrm{d}y$替代$f(x,\alpha)$带来简化的可能性要小些，故(6.4.3)不及(6.4.1)常用. 举两个简单例子：

730　求$I = \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　用(6.4.3)及题 728：

$$I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_0^a \sin xy\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\pi}{2}e^{-|a|}\right) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a e^{-|a|}.$$

731　求$I = \int_0^\infty xe^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x (a > 0)$.

解　用(6.4.3)及题 152：

$$I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_0^\infty xe^{-ax^2}\mathrm{d}x\int_0^b \sin xy\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a}\right] = \frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a}.$$

6.4.4　逐项积分法

为计算积分$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$而应用 RMI 原则的另一途径是，利用“展开 — 求和”这一互逆程序，即首先展开$f(x)$：$f(x) =$

$\sum u_n(x)$；逐项积分后求和以得出 I，即

$$I = \sum \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x. \qquad (6.4.4)$$

732 求 $I = \int_0^1 x^{-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$.

解 利用 $\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} x^n/n$，立得

$$I = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{-2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

733 求 $I = \int_0^1 \ln x \ln(1-x)\mathrm{d}x$.

解 利用 $\ln(1-x) = -\sum_1^\infty x^n/n$：

$$\begin{aligned}
I &= -\sum_1^\infty \frac{1}{n}\int_0^1 x^n \ln x \mathrm{d}x \\
&= \sum_1^\infty \frac{1}{n}\int_0^\infty t e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)^2} \\
&= \sum_1^\infty \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 2 - \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

734 求 $I = \int_0^\infty x(e^x+1)^{-1}\mathrm{d}x$.

解 利用 $(e^x+1)^{-1} = e^{-x}(1+e^{-x})^{-1} = \sum_0^\infty (-1)^n e^{-(n+1)x}$：

$$\begin{aligned}
I &= \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^\infty x e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x \\
&= \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{-2} \\
&= \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

仿此你可解以下两题.

735 求 $\int_0^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{e^{2\pi x}-1}$ $\left(=\frac{1}{24}\right)$.

736 求$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3(e^{\pi/x}-1)}$ $\left(=\frac{1}{6}\right)$.

737 求$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x(|q|\neq 1)$.

解 当$|q|<1$时用 Euler 公式展开被积函数：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\sum_1^{\infty}q^{n-1}x\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \sum_1^{\infty}q^{n-1}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \pi\sum_1^{\infty}\frac{(-q)^{n-1}}{n} \\
&= \frac{\pi}{q}\ln(1+q).
\end{aligned}
$$

当$|q|>1$时$I=\frac{\pi}{q}\ln(1+q^{-1})$(参考 5.10.2).

738 求$I=\int_0^{\pi}\ln(1-2q\cos x+q^2)\mathrm{d}x(|q|\leqslant 1)$.

提示：$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_1^{\infty}q^n\cos nx$；$I=0$.

第七章　不等式之证明

你看了标题之后，可能会有些疑惑：这是一个值得专辟一章的重要课题吗？确实，你学过的大学数学教科书中，没有哪一节是专论不等式的．但这丝毫不表明不等式不重要．恰好相反，不等式是数学中最重要的东西，它所承载的信息之多，唯有等式可与之相匹．一个简单而有普遍意义的例子是，对于“量 B 控制量 A”这一事实，除了用不等式 $A \leqslant B$ 来描述以外，你还能想出更好的表达方式码？可以说，数学提供的不等式愈多，对于量的比较就愈方便．大学数学能提供大量的不等式，而其中不少是通过习题来熟悉的．

好了，你最关心的只是本章将如何告诉你证不等式的方法．只有一句开头语是必要的：对于每一类不等式的证明，我们只选择那些可靠的、有标准“操作”程序的方法，唯有这种方法是易于掌握的．

7.1　基本不等式

本节所称的基本不等式，是指 Cauchy 不等式，Hölder 不等式与均值不等式(详见下文)，它们的应用是如此广泛，以至可以说，对它们有某种程度的熟悉是当代大学生基本数学修养的必备要求．基本不等式是许多其它不等式的源泉；本节给出从基本不等式导出新不等式的一些例子．

7.1.1 Cauchy 不等式

所谓 Cauchy 不等式是指

$$\left(\sum_1^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_1^n x_i^2 \sum_1^n y_i^2, \tag{7.1.1}$$

其中 $x_i, y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是任何实数. 凡涉及到估计形如 $\sum x_i y_i$ 的量时,你务必联想到 Cauchy 不等式.

739 证明不等式(7.1.1).

证 此不等式的证法甚多,以下的证明可能是最简单自然的:

$$\sum x_i^2 \sum y_i^2 - \left(\sum x_i y_i\right)^2 = \sum x_i^2 \sum y_j^2 - \sum x_i y_i \sum x_j y_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0.$$

下面考虑由(7.1.1)导出新不等式. 设要证不等式的小端为 $\sum a_i$,为应用(7.1.1),关键在于找出适当的分解 $a_i = x_i y_i$. 一些典型的分解在下列例题中示明.

740 证明 $n^{-1}\sum_1^n x_i \leqslant \sqrt{n^{-1}\Sigma_1^n x_i^2}$.

证 取 $y_i = 1$,用(7.1.1)得:

$$\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leqslant \sum_1^n x_i^2 \sum_1^n y_i^2 = n\sum_1^n x_i^2$$

741 证明 $\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leqslant \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n a_i^{-2} x_i^2 (a_i \neq 0)$.

证 利用分解 $x_i = a_i \cdot (x_i/a_i)$ 由(7.1.1)立得.

受此启发,你应当能解以下几题.

742 证明 $\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leqslant \sum_1^n e^{a_i} \sum_1^n e^{-a_i} x_i^2$.

743 证明 $[(1 - x^n)/(1 - x)]^2 \leqslant \sum_1^n e^{kx} \sum_1^n e^{-kx} x^{2k-2} (x \neq 1)$.

744 证明$\left(\sum a_i x_i\right)^2 \leqslant \sum_1^n a_i \sum_1^n a_i x_i^2 (a_i \geqslant 0)$.

提示：利用分解：$a_i x_i = \sqrt{a_i} \cdot \sqrt{a_i} x_i$.

745 证明 $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

证 由(7.1.1)，

$$\begin{aligned}|a\sin x + b\cos x| &\leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

746 设$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是某向量的方向余弦，证明 $|a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

如果你注意到本书不断强调和式与积分之间的类似，那么容易想到对于积分亦会有一个 Cauchy 不等式，它就是：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x, \qquad (7.1.2)$$

其中$f, g \in C[a,b]$(实际上，只要(7.1.2)中出现的积分存在即可).

747 证明不等式(7.1.2).

证 以下证明完全是题 739 证明的一个仿造：

$$\begin{aligned}&\int_a^b f^2(x)\int_a^b g^2(x)dx - \left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f^2(x)g^2(y) + f^2(y)g^2(x) - \\ &\qquad 2f(x)g(x)f(y)g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0.\end{aligned}$$

由(7.1.2)导出新不等式的方法亦类似于由(7.1.1)导出新不等式. 以下各题可看作题 740 — 746 的推广.

748 证明$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x, f \in C[a, b]$(下同)

749 证明

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b [f(x)/g(x)]^2\mathrm{d}x(g(x)\neq 0).$$

750 证明$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b e^{g(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f^2(x)e^{-g(x)}\mathrm{d}x$.

751 证明$\int_0^\pi xe^{\sin x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2} e^{-\cos x}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^3/9$.

证 利用$\int_0^{\pi/2} e^{-\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x$ 与上题：

$$\int_0^\pi xe^{\sin x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2} e^{-\cos x}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{2\pi^3}{9}.$$

752 证明

$$\left[\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f(x)\int_a^b f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x(f(x)\geqslant 0).$$

提示：参照题 744.

753 证明

$$\left[\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

$(f(x)\geqslant 0)$.

提示：利用上题.

754 证明$\left|\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}$

证 这由(7.1.2)与$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = 1/3$得出.

7.1.2 Hölder 不等式

设 $p,q>0, p^{-1}+q^{-1}=1$，Hölder 不等式是指：

$$\sum_1^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_1^n |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_1^n |y_i|^q\right)^{1/q}. \qquad (7.1.3)$$

当 $p=q=2$ 时(7.1.2)与(7.1.3)重合，可见(7.1.3)是(7.1.2)的推广.

755 证明不等式(7.1.3).

证 此不等式证法亦甚多，以下证明用到不等式 $a^{1/p}b^{1/q} \leqslant p^{-1}a + q^{-1}b(a,b \geqslant 0$，参考题 811)．不妨设 $x_i, y_i \geqslant 0$，且 $\sum x_i^p \sum y_i^q \neq 0$，于是

$$\left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum x_i^p\right)^{-1/p}\left(\sum y_i^q\right)^{-1/q}$$

$$= \sum_i \left\{\frac{x_i^p}{p\sum_j x_j^p}\right\}^{1/p}\left\{\frac{y_i^p}{\sum_j y_j^q}\right\}^{1/q}$$

$$\leqslant \sum_i \left[\left\{\frac{x_i^p}{p\sum_j x_j^p}\right\} + \left\{\frac{y_i^q}{q\sum_j y_j^q}\right\}\right] = p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

由 Hölder 不等式导出新不等式很类似于 Cauchy 不等式的情况，只举少量例子．

756 证明 $n^{-1}\sum_1^n x_i \leqslant \left(n^{-1}\sum_1^n |x_i|^q\right)^{1/q}$.

证 在(7.1.3)中取 $y_i = 1$：

$$n^{-1}\sum_1^n x_i \leqslant n^{-1}n^{1/p}\left(\sum_1^n |x_i|^q\right)^{1/q} = \left(n^{-1}\sum_1^n |x_i|^q\right)^{1/q}.$$

757 证明 $\sum_1^n x_i \leqslant \left(\sum_1^n e^{pa_i}\right)^{1/p}\left(\sum_1^n e^{-qa_i}|x_i|^q\right)^{1/q}$.

提示：参照题 742.

758 设 $f, g \in C[a,b]$，证明积分形式的 Hölder 不等式：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right]^{1/q}. \tag{7.1.4}$$

提示：用如题 755 的证法.

759 证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sqrt[p]{b-a}\left[\int_a^b |f(x)|^q \mathrm{d}x\right]^{1/q}$.

提示：应用(7.1.4)并参照题 756.

7.1.3 均值不等式

对于 n 个数 $x_i \geqslant 0$，有各种意义下的"均值"，因而亦有比较各种均值的不等式，最著名的是"几何均值 $\leqslant$ 算术均值"，即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}. \tag{7.1.5}$$

(7.1.5)的如下极值推论具有重大意义：**有定和的 n 个正数仅当彼此相等时积最大；有定积的 n 个正数仅当彼此相等时和最小**(参考题 376).

760 证明不等式(7.1.5).

证 此不等式证法甚多，用微分法可能最简捷. 固定 $S = \sum_1^n x_i (x_i \geqslant 0)$，(7.1.5) 相当于 $\sum_1^n \ln x_i \leqslant n\ln(S/n)$(某个 $x_i = 0$ 时不必证)，于是问题归于解

$$\max \sum_1^n \ln x_i, \sum_1^n x_i = S.$$

令 $L = \sum_1^n \ln x_i + \lambda \sum_1^n x_i$，则 $\partial L/\partial x_i = 0$ 得 $x_i = -\lambda^{-1} (1 \leqslant i \leqslant n)$，因此 $x_i = S/n$，从而 $\sum_1^n \ln x_i \leqslant n\ln(S/n)$.

由(7.1.5) 可导出许多其它均值不等式，以下是两个例子.

761 证明 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p} (x_i \geqslant 0, p > 0)$.

证 在(7.1.5) 中以 x_i^p 代 $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 即得.

762 证明 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geqslant n \Big/ \sum_1^n x_i^{-1} (x_i > 0)$.

证 在(7.1.5) 中以 $1/x_i$ 代 x_i 即得.

在(7.1.5) 中取 $n = 2$ 且以 a, b 换 x_1, x_2 得

$$\sqrt{ab} \leqslant 2^{-1}(a+b), a, b \geqslant 0. \tag{7.1.6}$$

(7.1.6) 是最简单而又最常用的不等式之一，但其应用仍然往往被忽略，下面考虑几个例子.

763 证明 $\sqrt{a} \leqslant 2^{-1}(b + ab^{-1}) (a, b > 0)$.

764 证明 $4a^{\ln t} + a^{\ln(1/t)} \geqslant 4 (a, t > 0)$

以上不等式易从(7.1.6) 推出.

765 证明 $a^x b^y \leqslant \exp(-2\sqrt{xy\ln a\ln b})(x,y \geqslant 0, 0 < a, b \leqslant 1)$

证 令 $u = -x\ln a, v = -y\ln b$，则要证不等式化为

$$u + v \geqslant 2\sqrt{uv} \quad (u,v \geqslant 0).$$

7.2 单调性与不等式

设要证不等式已规范化为，

$$f(x) > 0 \quad (a < x < b) \tag{7.2.1}$$

或

$$f(x) \geqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{7.2.2}$$

若能判明 $f'(x) > 0(\geqslant 0)$，而 $f(a) \geqslant 0$，则因 $f(x)$ 严格单调增（单调增），不等式(7.2.1)(7.2.2) 必成立. 这样，问题转化为证新的不等式

$$f'(x) > 0(a < x < b), f(a) \geqslant 0 \tag{7.2.3}$$

或

$$f'(x) \geqslant 0(a < x < b), f(a) \geqslant 0. \tag{7.2.4}$$

当然你会指望(7.2.3) 或(7.2.4) 较易证明. 倘(7.2.3) 或(7.2.4) 仍不能直接证明，进而可考虑二阶乃至更高阶的导数. 你不难证明以下一般结论：

设 $n \geqslant 1, f^{(n)}(x) > 0(a < x < b), f^{(k)}(a) \geqslant 0(0 \leqslant k < n)$，则不等式(7.2.1) 成立.

你不妨写出使不等式(7.2.2) 成立的相应条件.

7.2.1 关于初等函数的不等式

766 证明 $e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)(x > 0)$.

证 令 $f(x) = e^x - 1 - (1+x)\ln(1+x)$，则

$$f'(x) = e^x - \ln(1+x) - 1;$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{1+x} > 0(x > 0),$$

这与 $f(0)=f'(0)=0$ 一起推出所要证.

767　证明 $x-2^{-1}x^2<\ln(1+x)<x(x>0)$.

证　令 $f(x)=\ln(1+x)-x+x^2/2$，则 $f'(x)=(1+x)^{-1}-1+x$，$f''(x)=1-(1+x)^{-2}>0(x>0)$，$f(0)=f'(0)=0$. 这推出 $x-x^2/2<\ln(1+x)$. 类似地可证 $\ln(1+x)<x$.

768　证明 $x-2x^2<\ln(1+x)(-1/2<x<0)$

证　这归于证 $f(x)=\ln(1-x)+x+2x^2>0(0<x<1/2)$. 因 $f''(x)=4-(1-x)^{-2}>0$，$f(0)=f'(0)=0$，故结论成立.

769　证明 $(1+x^{-1})^x<e<(1+x^{-1})^{x+1}(x>0)$.

证　首先将要证不等式化为

$$\ln(1+x)<x<(1+x)\ln(1+x)(x>0),$$

于是只要证 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x>0(x>0)$，这由 $f'(x)=\ln(1+x)>0(x>0)$，$f(0)=0$ 推出.

770　证明 $(n-1)^{-1}<\ln(1+n^{-1})<n^{-1}(n\geqslant 1)$.

提示：化为题 769 的情况.

771　证明 $e<(1+x^{-1})^{x+1/2}(x>0)$.

证　只要证 $f(x)=\ln(1+x)+4(x+2)^{-1}-2>0(x>0)$，这由 $f'(x)=x^2(x+1)^{-1}(x+2)^{-2}>0$，$f(0)=0$ 推出.

772　证明 $e-(1+n^{-1})^n<e/(2n+1)(n\geqslant 1)$.

证　只要证 $f(x)=\ln(1+x)+x\ln(1+2^{-1}x)-x>0(x>0)$，这由 $f''(x)=(x^3+5x^2+5x)(x+1)^{-2}(x+2)^{-2}>0(x>0)$，$f(0)=f'(0)=0$ 推出.

以上几题表明，将要证不等式化为 $f(x)>0$ 时，应使 $f(x)$ 尽可能简单，以便判定 $f'(x)>0$ 或 $f''(x)>0$.

773　证明 $2x/\pi<\sin x<x(0<x<\pi/2)$.

证 易证 $\sin x < x(x > 0)$. 令 $f(x) = x^{-1}\sin x$,则 $f'(x) = x^{-2}\cos x(x - \mathrm{tg}x) < 0(0 < x < \pi/2$,参看题775),因此 $f(x) > f(\pi/2) = 2/\pi$,即 $\sin x > 2x/\pi(0 < x < \pi/2)$.

774 证明 $x - 6^{-1}x^3 < \sin x(x > 0)$.

证 只要证 $f(x) = \sin x - x + 6^{-1}x^3 > 0(x > 0)$,这由 $f''(x) = x - \sin x > 0(x > 0)$,$f(0) = f'(0) = 0$ 推出.

775 证明 $\mathrm{tg}x > x + x^3/3(0 < x < \pi/2)$.

证 只要证 $f(x) = \sin x - (x + x^3/3)\cos x > 0(0 < x < \pi/2)$. 因 $f'(x) = x[(1 + x^2/3)\sin x - x\cos x] = xg(x)$,$g'(x) = (5/3)x\sin x + (x^2/3).\cos x > 0$,$f(0) = g(0) = 0$,故所要结论成立.

776 证明 $2\ln\sec x < \sin x\mathrm{tg}x(0 < x < \pi/2)$.

证 只要证 $f(x) = \sin x\mathrm{tg}x + 2\ln\cos x > 0(0 < x < \pi/2)$,这由 $f'(x) = \sin x\sec^2 x(1 - \cos x)^2 > 0$,$f(0) = 0$ 推出.

777 证明 $(m + n)(1 + x^m) \geqslant 2n(1 - x^{m+n})/(1 - x^n)(0 < x < 1, 1 \leqslant n \leqslant m)$.

证 只要证 $f(x) = (m + n)(1 + x^m)(1 - x^n) - 2n(1 - x^{m+n}) \geqslant 0$. 因

$f'(x) = (m + n)x^{n-1}g(x)$,$g(x) = (n - m)x^m + mx^{m-n} - n$,

$g'(x) = m(m - n)x^{m-n-1}(1 - x^n) \geqslant 0(0 < x < 1)$,故 $g(x) \leqslant g(1) = 0$,因此 $f'(x) \leqslant 0$,从而 $f(x) \geqslant f(1) = 0$.

上题及题775证明中都用较简单的 g 代替了 f',这是很值得注意的.

以下两题中的不等式含有多个变元,应适当地选定其中一个变元作为自变量.

778 证明 $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}(x, y > 0, 0 < \alpha < \beta)$.

证 令 $f(\alpha)=\alpha^{-1}\ln(x^\alpha+y^\alpha)$，只要证 $f'(\alpha)<0(\alpha>0)$.

$$\alpha^{-1}f'(\alpha)=\frac{t\ln t+s\ln s}{t+s}-\ln(t+s),$$

其中 $t=x^\alpha, s=y^\alpha$，固定 $s>0$，只要证

$$g(t)=t\ln t+s\ln s-(t+s)\ln(t+s)<0(t>0).$$

这由 $g'(t)=\ln t-\ln(t+s)<0(t>0)$，$g(0)=0$ 推出.

779 证明 $(x+y)^p>x^p+y^p(x,y>0,p>1)$.

证 只要证 $f(t)=(1+t)^p-t^p-1>0(t>0)$，这由 $f'(t)=p(1+t)^{p-1}-pt^{p-1}>0(t>0)$，$f(0)=0$ 推出.

780 证明 $\sin x<3x/\pi(\pi/6<x<\pi/2)$.

7.2.2 积分不等式

含积分的不等式在本章中多处出现，此处仅讨论那些能用单调性方法证明的积分不等式.

781 设 $f\in C[0,1]$ 单调减，证明 $a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a f(x)\mathrm{d}x(0\leqslant a\leqslant 1)$.

证 不等式中含变元 a，如同 7.2.1 一样，首先应构成某个联系于不等式的单调函数 $F(a)$. 此处以 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 作为 $F(a)$ 不能成功，合适的选择是令 $F(a)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x(0<a\leqslant 1)$，只要证 $F(a)\geqslant F(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，这由下式得出：

$$a^2F'(a)=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\leqslant af(a)-af(a)=0.$$

以下是应用题 781 的两个具体例子.

782 证明

$$\int_0^a(1-x^2)^{n/2}\mathrm{d}x\geqslant\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

$(n \geqslant 0, 0 \leqslant a \leqslant 1)$.

证 首先算出(参考 1.4.1)

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{n/2}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{n+2}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

于是所要不等式由题 781 推出.

783 证明 $\int_0^a (1-x^2)^{5/2}\mathrm{d}x \geqslant 5a\pi/32$.

提示:在上题中取 $n = 5$.

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可微函数,若 $f'(x)$ 单调增(单调减),则 $f(x)$ 是凸(凹)函数,此时由其图形的明显几何特性可推断出一系列积分不等式(见题 784 ~ 787),这类不等式适于用单调性方法证明.

784 设 $f'(x)$ 单调增,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证 不等式并不含自由变元.在这种情况下,常见的做法是将一区间端点如 b 换成变元,即令 $F(x) = (x-a)[f(a)+f(x)] - 2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,要证者 $F(b) \geqslant 0$,这由 $F(a) = 0$ 及下式推出:

$$F'(x) = f(a) + f(x) + (x-a)f'(x) - 2f(x)$$
$$= (x-a)[f'(x) - f'(\theta)] \geqslant 0$$
$$(a < \theta < x \leqslant b).$$

785 设 $f'(x)$ 单调增,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - (x-a)f\left(\frac{a-x}{2}\right)$,要证者

$F(b) \geqslant 0$,这由 $F(a)=0$ 及下式推出:

$$F'(x) = f(x) - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)$$

$$= \frac{x-a}{2}\left[f'(\theta) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right] \geqslant 0$$

$$\left(\frac{a+x}{2} < \theta < x \leqslant b\right).$$

786 设 $f'(x)$ 单调减,证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

787 设 $f'(x)$ 单调减,证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

以上两题的证明可借鉴题784、785.若以 $-f(x)$ 换 $f(x)$,则其结论直接从题784,785推出.

7.3 极值与不等式

极值关系本身就是不等式:$u \leqslant \max u$.因此,通过考虑极值问题来证不等式是很自然的.下面分单变量与多变量两种情况考虑.

7.3.1 单变量情况

若要证明 $f(x) \leqslant M(a < x < b)$,则只需指明

$$\max_{a<x<b} f(x) \leqslant M. \tag{7.3.1}$$

具体做法是:首先验明 $f(a), f(b) \leqslant M$(当 $a=-\infty$ 或 $b=\infty$ 时 $f(a)$ 或 $f(b)$ 应理解为极限);然后求出 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的零点 $x_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 并验证 $f(x_i) \leqslant M$.当要证不等式换成 $f(x) \geqslant M$ 时,以上方法需作的修改是显然的.

788 证明 $2^{1-p} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1(0 \leqslant x \leqslant 1, p > 1)$.

证 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，则 $2^{1-p}\leqslant 1=f(0)=f(1)$. 其次，$f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x^{p-1}]$ 以 $1/2$ 为唯一零点，且 $f(1/2)=2^{1-p}$，因此 $2^{1-p}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

你必定很容易证明题 788 的以下推广：

789 证明 $2^{1-p}a^p\leqslant x^p+(a-x)^p\leqslant a^p(0\leqslant x\leqslant a,p>1)$.

790 证明 $3x^2\leqslant\sqrt[3]{4}(1+x^3)(x\geqslant 0)$.

证 只要证 $f(x)=3x^2-\sqrt[3]{4}x^3\leqslant\sqrt[3]{4}$. 因 $f(0)=0<\sqrt[3]{4}$，$f(\infty)=-\infty<\sqrt[3]{4}$，$f'(x)=6x-3\sqrt[3]{4}x^2$ 在 $(0,\infty)$ 内有唯一零点 $x_0=2/\sqrt[3]{4}$ 且 $f(x_0)=\sqrt[3]{4}$，故要证结论成立.

你可能提出取 $f(x)=3x^2/(1+x^3)$，但这是一种效果欠佳的选择.

791 证明 $x^n(1-x)<(ne)^{-1}(0<x<1,n\geqslant 1)$.

证 令 $f(x)=x^n(1-x)$，则 $f(0)=f(1)=0$，$f'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$ 在 $(0,1)$ 内有唯一零点 $x_n=n/(n+1)$，且

$$f(x_n)=[n(1+n^{-1})^{n+1}]^{-1}<(ne)^{-1}$$

(用题 769)，因此 $f(x)<(ne)^{-1}(0<x<1)$.

792 证明 $\sum_1^n x^i(1-x)^{2i}<4/23(0\leqslant x\leqslant 1)$.

证 因 $x^i(1-x)^{2i}$ 在 $x=1/3$ 时取极大值，故

$$\sum_1^n x^i(1-x)^{2i}\leqslant\sum_1^n\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{2i}=\sum_1^n\left(\frac{4}{27}\right)^i<\frac{4}{23}.$$

793 证明 $(x+1)^{-1}-(bx+1)^{-1}\leqslant(\sqrt{b}-1)/(\sqrt{b}+1)(x\geqslant 0,b>1)$.

证 令 $f(x)=(x+1)^{-1}-(bx+1)^{-1}$，则 $f(0)=f(\infty)=0$，$f'(x)$ 有唯一零点 $1/\sqrt{b}$，且 $f(1/\sqrt{b})=(\sqrt{b}-1)/(\sqrt{b}+1)$，故要证不等式成立.

794 证明 $\sqrt{2aex}\leqslant\exp(ax^2)(x\geqslant 0,a>0)$.

证　只要证 $f(x)=x\exp(-ax^2)\leqslant 1/\sqrt{2ae}$. 因 $f(0)=f(\infty)=0<1/\sqrt{2ea}$, $f'(x)$ 有唯一零点 $x_0=1/\sqrt{2a}$ 且 $f(x_0)=1/\sqrt{2ae}$, 故所要结论为真.

你来证类似的问题:

795　证明 $e^{-x}\leqslant(ex)^{-1}(x>0)$.

796　证明 $(x+y)^n\leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n)(x,y>0,n>1)$.

证　令 $f(x)=2^{n-1}(x^n+y^n)-(x+y)^n$, 则 $f(0),f(\infty)>0$, $f'(x)$ 有唯一零点 y 且 $f(y)=0$, 因此 $f(x)\geqslant 0$.

上面证明中将 y 当常量看待. 这种观点对于处理某些多变量不等式是有利的, 如下题.

797　证明 $xy\leqslant x\ln x+e^{y-1}(x\leqslant 0)$.

证　只要证 $f(x)=xy-x\ln x\leqslant e^{y-1}(x>0)$. 因 $f(0)=0$, $f(\infty)=-\infty$, $f'(x)$ 有唯一零点 $x_0=e^{y-1}$ 且 $f(x_0)=e^{y-1}$, 故所要结论为真.

下面是一个稍复杂的问题.

798　证明 $5\sin^2x\leqslant 4\exp(x-\operatorname{arctg}2)(x\geqslant 0)$.

证　只要证 $f(x)=e^{-x}\sin x\leqslant(4/5)e^{-\operatorname{arctg}2}$. 显然 $f(0)=f(\infty)=0$. $f'(x)=e^{-x}\sin 2x(1-2^{-1}\operatorname{tg}x)$ 在 $(0,\infty)$ 内有零点 $x_n=n\pi/2(n\geqslant 1)$ 与 $y_n=n\pi+\operatorname{arctg}2(n\geqslant 0)$. 由 $f(x_{2n})=0$;

$$f(x_{2n-1})=e^{-n\pi-\pi/2}\leqslant e^{-\pi/2}<\frac{4}{5}e^{-\operatorname{arctg}2};$$

$$f(y_n)=e^{-\operatorname{arctg}2}\sin^2(\operatorname{arctg}^2)=\frac{4}{5}e^{-\operatorname{arctg}2}$$

推出所要结论.

7.3.2　多变量情况

以两变量情况为例说明方法要点如下:

(i) 将要证不等式写成 $f(x,y)\leqslant F(\varphi(x,y))$, f,φ 应尽可能简单, 特别应便于求导.

(ii) 对任意指定常数 c（当然要求 c 在 φ 的值域之内），解最大值问题

$$\max f(x,y),\quad \varphi(x,y)=c. \tag{7.3.2}$$

为此应用 Lagrange 乘数法：令 $L=f+\lambda\varphi$，由

$$L_x=0, L_y=0, \varphi=c \tag{7.3.3}$$

解出 $(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})$（$\bar{\lambda}$ 并非问题最终所需要，但求出它可能有助于求 $\bar{x},\bar{y}$）.

(iii) 验证 $f(\bar{x},\bar{y})$ 确为问题(7.3.2)的最大值. 若 $(\bar{x},\bar{y})$ 是(7.3.3)的唯一解，实际考虑能断定(7.3.2)有最大值存在，则 $f(\bar{x},\bar{y})$ 必为最大值而无需验证.

(iv) 验证 $f(\bar{x},\bar{y})\leqslant F(c)$（往往有 $f(\bar{x},\bar{y})=F(c)$）. 由 c 的任意性，知要证不等式成立.

将(7.3.2)中的 max 换成 min 并相应修改其它各项，得出证不等式 $f(x,y)\geqslant F(\varphi(x,y))$ 的方法.

799 证明 $(e^x+e^y)/2\geqslant e^{(x+y)/2}$.

证 归于解最小值问题

$$\min(e^x+e^y), x+y=c. \tag{7.3.4}$$

令 $L=e^x+e^y+\lambda(x+y)$，由 $L_x=L_y=0, x+y=c$ 解出 $\bar{x}=\bar{y}=c/2$. 因当 $x+y=c, x\to\infty$（或 $y\to\infty$）时 $e^x+e^y\to\infty$，故 $e^{\bar{x}}+e^{\bar{y}}=2e^{c/2}$ 确为问题(7.3.4)的最小值. 因此

$$e^x+e^y\geqslant 2e^{c/2}=2e^{(x+y)/2}.$$

上题中的不等式可写成 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}[f(x)-f(y)]$，$f(x)=e^x$. 实际上，此不等式对任何凸函数成立. 下面几个实例由你来证明.

800 证明 $xe^x+ye^y\geqslant(x+y)e^{(x+y)/2}(x,y>0)$.

801 证明 $x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln[(x+y)/2](x,y>$

0).

802　证明 $\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}\leqslant 2\sqrt[n]{(x+y)/2}\,(x,y>0)$.

803　证明 $2\mathrm{tg}[(x+y)/2]\leqslant \mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y\,(0\leqslant x,y<\pi/2)$.

804　证明 $e^x+e^y\geqslant 2e^{\sqrt{xy}}\,(x,y>0)$.

证　问题归于解最小值问题

$$\min(e^x+e^y),xy=c>0,x,y>0. \qquad (7.3.5)$$

令 $L=e^x+e^y+\lambda xy$. 由 $L_x=L_y=0,xy=c$ 解出 $\bar{x}=\bar{y}=\sqrt{c}$. 当 $xy=c,0<x\to 0$ 时 $y\to\infty$,从而 $e^x+e^y\to\infty$,可见 $e^{\bar{x}}+e^{\bar{y}}=2e^{\sqrt{c}}$ 是问题(7.3.5)的最小值. 因此

$$e^x+e^y\geqslant 3e^{\sqrt{c}}=2e^{\sqrt{xy}}.$$

805　证明 $xyz^3\leqslant 27[(x+y+z)/5]^5\,(x,y,z>0)$.

证　考虑最大值问题

$$\max xyz^3,x+y+z=c>0,x,y,z>0.$$

令 $L=xyz^3+\lambda(x+y+z)$. 由 $L_x=L_y=0,x+y+z=c$ 解出 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}/3=c/5$,于是(省略有关极值性的说明,下同)

$$xyz^3\leqslant \bar{x}\bar{y}\bar{z}^3=27(c/5)^5=27[(x+y+z)/5]^5.$$

你将有不少机会碰到类似于题 805 的问题,因此应有兴趣解以下几题.

806　证明 $xy^2z^3\leqslant 108[(x+y+z)/6]^6\,(x,y,z>0)$.

807　证明 $16^{11}x^3y^2z\leqslant 9^6(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z})^{16}\,(x,y,z>0)$

提示:令 $u=\sqrt{x},v=\sqrt[3]{y},w=\sqrt[4]{z}$,化原不等式为 $u^3v^3w^2\leqslant 4^{-11}9^3(u+v+w)^8\,(u,v,w>0)$.

808　证明 $x^3y^2z^3\leqslant 4[(xy+yz+xz)/4]^4\,(x,y,z>0)$.

809　证明 $x^ay^b(a+b)^{a+b}\leqslant(ax+by)^{a+b}\,(x,y,a,b>0)$.

证　固定 $a,b>0$,考虑最大值问题

$$\max x^a y^b, ax + by = c > 0, x, y > 0.$$

令 $L = x^a y^b + \lambda(ax + by)$，从 $L_x = L_y = 0, ax + by = c$ 解出 $\bar{x} = \bar{y} = c/(a + b)$，于是

$$x^a y^b \leqslant \bar{x}^{a+b} = \left(\frac{c}{a + b}\right)^{a+b} = \left(\frac{ax + by}{a + b}\right)^{a+b}.$$

利用题 809，你容易证明：

810 证明 $(x/m)^m(y/n)^n \leqslant [(x + y)/(m + n)]^{m+n}(x, y, m, n > 0)$.

811 设 $0 < \alpha = 1 - \beta < 1$，证明 $x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y(x, y \geqslant 0)$.

你也不难证明题 809，811 的以下推广：

812 证明 $\prod_1^n a_i^{b_i} \leqslant \left(\sum_1^n a_i b_i \Big/ \sum_1^n b_i\right)^{\sum_1^n b_i}(a_i, b_i > 0)$.

813 设 $p_i > 0, \sum_1^n p_i^{-1} = 1$，证明 $\prod x_i^{1/p_i} \leqslant \sum_1^n x_i/p_i (x_i \geqslant 0)$.

814 证明 $ax^2 + by^2 \geqslant \dfrac{ab}{a + b}(x + y)^2(x, y, a, b > 0)$.

证 固定 $a, b > 0$，解最小值问题.

$$\min(ax^2 + by^2), x + y = c > 0, x, y > 0.$$

令 $L = ax^2 + by^2 + \lambda(x + y)$，则从 $L_x = L_y = 0, x + y = c$ 解出 $\bar{x} = bc/(a + b), \bar{y} = ac/(a + b)$，于是

$$ax^2 + by^2 \geqslant a\bar{x}^2 + b\bar{y}^2 = \frac{ab}{a + b}(x + y)^2.$$

用类似的方法你能证明：

815 证明 $a^2x^3 + b^2y^3 \geqslant \dfrac{a^2b^2}{(a + b)^2}(x + y)^3(a, b, x, y > 0)$.

7.4 含导数的不等式

本节设 $a<b, c=(a+b)/2, h=(b-a)/2, f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 C^1 或 C^2 函数. 由 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(y)+f'(\xi)(x-y); \tag{7.4.1}$$

$$f(x)=f(y)+f'(y)(x-y)+2^{-1}f''(\xi)(x-y)^2, \tag{7.4.2}$$

其中 ξ 介于 x,y 之间, $x,y\in[a,b]$. 适当地选定 x,y 并利用有关 f,f',f'' 的条件, 可得出关于 $|f(x)|$ 或 $|f'(x)|$ 的一定不等式, 它们可用作对 $|f(x)|$ 或 $|f'(x)|$ 的某种估计.

7.4.1 对 $|f(x)|$ 的估计

首先考虑依赖于 $f'(x)$ 的估计, 此时利用公式(7.4.1), 且通常选取 y 使 $f(y)=0$.

816 设 $f\in C^1[a,b], f(a)=f(b)=0$, 证明

$$|f(x)|\leqslant 2^{-1}(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f'(t)|\quad(a\leqslant x\leqslant b). \tag{7.4.3}$$

证 令 $M=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f'(t)|$. 取定 $x\in[a,b]$, 在(7.4.1)中取 $y=a$ 得 $|f(x)|\leqslant M(x-a)$. 同理 $|f(x)|\leqslant M(b-x)$, 于是

$$|f(x)|\leqslant M\min\{x-a,b-x\}\leqslant M\frac{(b-a)}{2}.$$

有趣的是, 条件 $f(a)=f(b)=0$ 通常可代以 $f(c)=0$(记住 $c=(a+b)/2$!). 你试证明:

817 设 $f\in C^1[a,b], f(c)=0$, 证明(7.4.3)成立.

818 设 $f\in C^2[a,b], f(a)=f(b)=0$, 证明

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 4^{-1}(b-a)^2\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f'(t)|. \tag{7.4.4}$$

证　依题 816 的记号有 $|f(x)| \leqslant M\min\{x-a, b-x\}$，于是

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant M\left[\int_a^c (x-a)\mathrm{d}x + \int_c^b (b-x)\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

819　设 $f \in C^1[a,b]$，$f(c)=0$，证明(7.4.4)成立.

其次考虑依赖于 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的估计，此时利用公式(7.4.2)，且通常亦取 y 使 $f(y)=0$.

820　设 $f \in C^2[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，证明

$$|f(x)| \leqslant 2^{-1}(b-a)\max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$
$$+ 4^{-1}(b-a)^2 \max_{a\leqslant t\leqslant b}|f''(t)| \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

证　令 $M = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$，$N = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f''(t)|$. 取定 $x \in [a,b]$，在(7.4.2)中取 $y=a$ 得 $|f(x)| \leqslant M(x-a) + 2^{-1}N(x-a)^2$. 同理有 $|f(x)| \leqslant M(b-x) + 2^{-1}N(b-x)^2$，综合起来得：

$$|f(x)| \leqslant 2^{-1}M(b-a) + 4^{-1}N[(x-a)^2 + (b-x)^2]$$
$$\leqslant 2^{-1}M(b-a) + 4^{-1}N(b-a)^2 \text{(用题 789)}.$$

821　设 $f \in C^2[a,b]$，$f(c)=0$，证明

$$|f(x)| \leqslant 2^{-1}(b-a)|f'(c)| + 8^{-1}(b-a)^2 \max_{a\leqslant t\leqslant b}|f''(t)|$$
$$(a \leqslant x \leqslant b).$$

822　设 $f \in C^2[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，M, N 依题 820 之证. 证明 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 4^{-1}M(b-a)^2 - (N/24)(b-a)^3$.

证　利用题 820 之证中所得不等式有：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^c \left[M(x-a) + \frac{N}{2}(x-a)^2\right]\mathrm{d}x$$
$$+ \int_c^b \left[M(b-x) + \frac{N}{2}(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{M}{4}\right)(b-a)^2 + \left(\frac{N}{24}\right)(b-a)^3.$$

823 设 $f \in C^2[a,b]$，$f(c)=0$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{24}(b-a)^3 \max_{a\leqslant t\leqslant b}|f''(t)|.$$

证 在(7.4.2)中取 $y=c$ 并在两边积分：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \left[f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_a^b f''(\xi)(x-c)^2\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{N}{2}\int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{N}{24}(b-a)^3 (N \text{ 依上题}).$$

当涉及3阶以上导数时需用3阶以上 Taylor 公式.

824 设 $f \in C^3[a,b]$，$f'(c)=0$，证明：

$$|f(a)-f(b)| \leqslant \frac{1}{24}(b-a)^3 \max_{a\leqslant t\leqslant b}|f''(t)|.$$

证 用 $f(x)$ 在 $x=c$ 处的3阶 Taylor 公式：

$$f(c\pm h) = f(c) + \frac{1}{2}f''(c)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_\pm)h^3;$$

$$|f(b)-f(a)| = \frac{h^3}{6}|f'''(\xi_+) - f'''(\xi_-)|$$

$$\leqslant \frac{1}{24}(b-a)^3 \max_{a\leqslant t\leqslant b}|f'''(t)|.$$

825 设 $f \in C^4[a,b]$，$|f^{(4)}(x)| \leqslant M$，证明：

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(c) - \frac{f''(c)}{8}(b-a)^2\right| \leqslant \frac{M}{384}(b-a)^4.$$

证 用 $f(x)$ 在 $x=c$ 处的4阶 Taylor 公式：

$$f(c\pm h) = f(c) \pm f'(c)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 \pm \frac{f'''(c)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_\pm)}{24}h^4;$$

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(c) - \frac{f''(c)}{2}h^2\right| \leqslant \frac{M}{24}h^4 = \frac{M}{384}(b-a)^4.$$

7.4.2 对 $|f'(x)|$ 的估计

如果给定了关于 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 的某种条件，则可能借助于公式(7.4.2)得出关于 $|f'(x)|$ 的一定不等式.

826 设 $f\in C^2[0,2]$，$|f(x)|\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$，证明 $|f'(x)|\leqslant 2(0\leqslant x\leqslant 2)$.

证 取定 $x\in[0,2]$，利用(7.4.2)(适当改换字母)得：

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+2^{-1}f''(\xi)x^2;$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+2^{-1}f''(\eta)(2-x)^2,$$

其中 $\xi,\eta\in[0,2]$. 以上两式相减得：

$$2|f'(x)|=|f(2)-f(0)+2^{-1}f''(\xi)x^2-2^{-1}f''(\eta)(2-x)^2|$$

$$\leqslant 2+2^{-1}[x^2+(2-x)^2]\leqslant 4\quad(\text{用题 }789).$$

考察上述证明你容易看出，实际上条件还可降低，且可在任何区间$[a,b]$上考虑：

827 设 $f\in C^2[a,b]$，证明

$$|f'(x)|\leqslant(b-a)^{-1}|f(b)-f(a)|+2^{-1}(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f''(t)|.$$

$$(a\leqslant x\leqslant b)$$

828 设 $f\in C^2[a,b]$，$f(a)=f(b)$，$|f''(x)|\leqslant N$，证明 $|f'(x)|\leqslant N(b-a)/2(a\leqslant x\leqslant b)$.

这是题 827 的特款，给出直接证明如下：取定 $x\in[a,b]$，以 $c\pm h,x$ 取代(7.4.2)中的 x,y 得：

$$f(c\pm h)=f(x)+f'(x)(c\pm h-x)$$

$$+2^{-1}f''(\xi_\pm)(c\pm h-x)^2,$$

其中 $\xi_\pm\in[a,b]$. 因 $f(a)=f(b)$，故由上式得

$$|f'(x)|(b-a)=\frac{1}{2}|f''(\xi_+)(b-x)^2-f''(\xi_-)(a-x)^2|$$

$$\leqslant\frac{N}{2}[(b-x)^2+(x-a)^2]\leqslant\frac{N}{2}(b-a)^2.$$

829 设 $f \in C^2(-\infty,\infty)$, $|f'(x)| \leqslant M$, $|f''(x)| \leqslant N$. 证明 $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2MN}$ $(|x| < \infty)$.

证 取定 x,任给 $h > 0$,由(7.4.2)有

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + 2^{-1}f''(\xi_+)h^2,$$

其中 $\xi_\pm \in (x, x \pm h)$,由上式得(参照上题之证)

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{1}{2h}|f(x+h) - f(x-h) - 2^{-1}f''(\xi_-)h^2 \\ &\qquad - 2^{-1}f''(\xi_+)h^2| \\ &\leqslant \frac{1}{2h}(2M + Nh^2) = \varphi(h), \end{aligned}$$

于是 $|f'(x)| \leqslant \min\limits_{h>0}\varphi(h) = \sqrt{2MN}$(用微分法求 φ 之极值).

830 设 $f \in C^2[a,b]$, $|f''(x)| \leqslant N$, f 在 (a,b) 内有极值点,证明 $|f'(a)| - |f'(b)| \leqslant N(b-a)$.

证 由条件知有 $x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = 0$. 对 $f'(x)$ 用一阶 Toylor 公式: $f'(a) = f'(x_0) + f''(\xi)(a - x_0)$ $(a < \xi < x_0)$,于是 $|f'(a)| \leqslant N(x_0 - a)$. 同理 $|f'(b)| \leqslant N(b - x_0)$,因此 $|f'(a)| + |f'(b)| \leqslant N(b-a)$.

831 设 $f \in C^2[a,b]$, $|f''(x)| \leqslant N$,证明

$$|f'(a) + f'(b)| \leqslant 2(b-a)^{-1}|f(b) - f(a)| - 2^{-1}(b-a)N.$$

提示:在 $c \pm h$ 处展开 $f(c)$.

7.4.3 含导数与中值的不等式

主要考虑含 $f''(\xi)$(ξ 是某个"中值")的不等式,且以公式(7.4.2)作为主要工具.

832 设 $f \in C^2[a,b]$, $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明:

$$|f''(\xi)| \geqslant 4(b-a)^{-2}|f(b) - f(a)| \quad (\exists\, \xi \in (a,b)). \tag{7.4.5}$$

证 在(7.4.2)中取 $x = c$, $y = c \pm h$ 得

$$f(c) = f(c \pm h) + 2^{-1}f''(\xi_{\pm})h^2,$$

其中 $\xi_{\pm} \in (c, c \pm h)$. 由上式得：

$$|f(b) - f(a)| = 2^{-1}h^2|f''(\xi_+) - f''(\xi_-)|$$

$$\leqslant 2^{-1}h^2[|f''(\xi_+)| + |f''(\xi_-)|] = h^2|f''(\xi)|,$$

其中 $\xi \in [\xi_-, \xi_+]$. 最后一步用到**导数的"介值性质"：任给可微函数 φ，不论 φ' 连续与否，$\varphi'(x)$（从而 $|\varphi'(x)|$）所取的值必充满一个区间**（后面将多次用到此结论）.

上题中的条件 $f'(a) = f'(b) = 0$ 可代以 $f'(c) = 0$，即你可以证明（参照 817）：

833　设 $f \in C^2[a,b]$，$f'(c) = 0$，证明(7.4.5)成立.

834　设 $f \in C^1[a,b]$，$f(a) = f(b) = 0$（或 $f(c) = 0$），证明

$$|f'(\xi)| \geqslant 4(b-a)^{-2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \quad (\exists\, \xi \in (a,b)).$$

提示：对 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 用前两题.

以下是题 833 的一个推广.

835　设 $f \in C^2[a,b]$，$f'(x_0) = 0$，$x_0 \in (a,b)$. 证明：

$$|f''(\xi)| \geqslant 2[(x_0-a)^2 + (b-x_0)^2]|f(b) - f(a)| \quad (\exists\, \xi \in (a,b)) \tag{7.4.6}$$

证　在(7.4.2)中取 $x = c \pm h$，$y = x_0$ 得

$$f(c \pm h) = f(x_0) + 2^{-1}f''(\xi_+)(c \pm h - x_0)^2;$$

$$2|f(b) - f(a)| = |f''(\xi_+)(b-x_0)^2 - f''(\xi_-)(x_0-a)^2|$$

$$\leqslant |f''(\xi_+)|(b-x_0)^2 + |f''(\xi_-)|(x_0-a)^2$$

$$= [(x_0-a)^2 + (b-x_0)^2]\frac{|f''(\xi_0)|(b-x_0)^2 + |f''(\xi_-)|(x_0-a)^2}{(b-x_0)^2 + (x_0-a)^2}$$

$$= [(x_0-a)^2 + (b-x_0)^2]|f''(\xi)|,$$

其中 $\xi_{\pm} \in (x_0, c \pm h)$，$\xi \in [\xi_-, \xi_+]$（参照题 832 之证）.

836 设 $f\in C^2[a,b]$，f 在 (a,b) 内有极值点. 证明存在 $\xi\in(a,b)$：$|f''(\xi)|\geqslant 2(b-a)^{-2}|f(b)-f(a)|$.

提示：利用(7.4.6)及题 789.

837 设 $f\in C^2[a,b]$，$f(x_0)=0$，$x_0\in(a,b)$，证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：

$$|f'(\xi)|\geqslant 2[(x_0-a)^2+(b-x_0)^2]^{-1}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

提示：对 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 用题 835.

838 设 $f\in C^2[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)>0$. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$f''(\xi)\leqslant -8M(b-a)^{-2}$.

证 取 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=M$，则 $f'(x_0)=0$. 于是

$$0=f(c\pm h)=M+2^{-1}f''(\xi_\pm)(c\pm h-x_0)^2;$$

$$\min f''(\xi_\pm)=2M\cdot\min\{(c\pm h-x_0)^{-2}\}$$

$$=-2M\cdot\min\{(x_0-a)^{-2},(b-x_0)^{-2}\}\leqslant -8M(b-a)^{-2},$$

因此可取 $\xi=\xi_+$ 或 ξ_-.

839 设 $f\in C^2[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，$M=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)<0$，证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$f''(\xi)\geqslant -8M(b-a)^{-2}$.

提示：用上题的证法；或者考虑 $-f(x)$ 并直接用上题结论.

7.5 含导数与积分的不等式

本节假设 $a<b$，$c=(a+b)/2$. 若 $f\in C^1[a,b]$，则

$$f(x)=f(y)+\int_y^x f'(t)\mathrm{d}t,\ x,y\in[a,b]. \qquad (7.5.1)$$

利用(7.5.1)可得出关于 $|f(x)|$（及 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 等）的一定不等

式. 这一方法有赖于以下两个考虑:

(i) 在(7.5.1)中适当选取 y,使 $f(y)$ 为已知,最好是 $f(y) = 0$.

(ii) 估计积分 $\int_y^x f'(t)\mathrm{d}t$ 时通常要利用 Cauchy 不等式或 Hölder 不等式(7.1.2),(7.1.4).

7.5.1 对 $|f(x)|$ 的估计

这类估计可从(7.5.1)式两边对 y 积分得出.

840 设 $f \in C^1[0,1]$,证明

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y + \int_0^1 |f'(y)|\mathrm{d}y \quad (0 \leqslant x \leqslant 1); \tag{7.5.2}$$

$$|f(1/2)| \leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y + 2^{-1}\int_0^1 |f'(y)|\mathrm{d}y. \tag{7.5.3}$$

证 直接对(7.5.1)两边关于 y 积分:

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \int_0^1 \left| f(y) + \int_y^x f'(t)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y + \int_0^1 |f'(y)|\mathrm{d}y;\end{aligned}$$

$$|f(1/2)| \leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y + \int_0^1 \left| \int_y^{1/2} f'(t)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y + \int_0^{1/2}\mathrm{d}y\int_y^{1/2} |f'(t)|\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 \mathrm{d}y\int_{1/2}^y |f'(t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y + \int_0^{1/2} y|f'(y)|\mathrm{d}y + \int_{1/2}^1 (1-y)|f'(y)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

看过上述证明之后,想必你能证明题 840 的以下推广.

841 设 $f \in C^1[a,b]$,证明

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|\mathrm{d}y + \int_a^b |f'(y)|\mathrm{d}y \quad (a \leqslant x \leqslant b); \tag{7.5.4}$$

$$|f(c)| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_a^b |f'(y)|\mathrm{d}y.$$

842 设 $f \in C^1[0,a]$，$a > 0$，证明

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(y)|\mathrm{d}y + \int_0^a |f'(y)|\mathrm{d}y \quad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

考察(7.5.2)(7.5.3)之证明看出，关键在于估计积分

$$\int_a^b \left|\int_y^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}y.$$

证(7.5.2)用的估计很粗；证(7.5.3)时因有 $x = 1/2$ 这一有利条件，所用估计稍细些. 下面是对(7.5.4)的一改进.

843 设 $f \in C^1[a,b]$，$a \leqslant x \leqslant b$，证明

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|\mathrm{d}y + \max\left\{\int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y, \int_x^b |f'(y)|\mathrm{d}y\right\}.$$

证 依据题 840 的证法，只需证：

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\int_y^x f'(t)\mathrm{d}y\right| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x \mathrm{d}y \int_y^x |f'(t)|\mathrm{d}t + \int_x^b \mathrm{d}y \int_x^y |f'(t)|\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (y-a)|f'(y)|\mathrm{d}y + \int_x^b (b-y)|f'(y)|\mathrm{d}y\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\left[(x-a)\int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y + (b-x)\int_x^b |f'(y)|\mathrm{d}y\right]$$

$$\leqslant \max\left\{\int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y, \int_x^b |f'(y)|\mathrm{d}y\right\}.$$

844 设 $f \in C^1[a,b]$，$f(a) = 0$，证明

$$f^2(x) \leqslant (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t$$

证 在(7.5.1)中取 $y = a$ 并用 Cauchy 不等式：

$$f^2(x) = \left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\mathrm{d}t.$$

845 设 $f \in C^1[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$,则

$$f^2(x) \leqslant \frac{b-a}{2}\max\left\{\int_a^c |f'(x)|^2 dx, \int_c^b |f'(x)|^2 dx\right\}$$
$$\leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

提示:用上题的证法.

7.5.2 对 $\int_a^b f^2(x)dx$ 的估计

若 $f(y) = 0$,则由(7.5.1)有

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b \left[\int_y^x f'(t)dt\right]^2 dx. \tag{7.5.5}$$

对 $\left[\int_y^x f'(t)dt\right]^2$ 用 Cauchy 不等式,就可从(7.5.5)得出关于 $\int_a^b f^2(x)dx$ 的或粗或细的估计.

846 设 $f \in C^1[a,b]$, $f(a) = 0$,证明

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b |f'(x)|^2 dx. \tag{7.5.6}$$

证 在(7.5.5)中取 $y = a$,并用 Cauchy 不等式,有

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \int_a^b (x-a)dx\int_a^x |f'(t)|^2 dt$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

847 设 $f \in C^1[a,b]$, $f(b) = 0$,证明(7.5.6)成立.

提示:用上题证法.

848 设 $f \in C^1[a,b]$, $f(c) = 0$,证明

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b |f'(x)|^2 dx. \tag{7.5.7}$$

证 用题 846 的证法但略加改进:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^x f'(t)dt\right]^2 dx$$

$$= \int_a^c \left[\int_x^c f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 dx + \int_c^b \left[\int_c^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_a^c (c-x)\mathrm{d}x \int_x^c |f'(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_c^b (x-c)\mathrm{d}x \int_c^x |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(c-a)^2 \int_a^c |f'(t)|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}(b-c)^2 \int_c^b |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}(b-a)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

上面详细写出了证明过程，意在使你进一步体会证法特点．实际上，只要组合题 846 与 847 的结果就够了，循这一思路的证明由你自己去写出．

在题 846 之证中，以$\int_a^b |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$ 代替了$\int_a^x |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$，这无疑太粗疏了，且看下题如何改进．

849 设 $f \in C^1[a,b]$，$f(a) = 0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$- \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x. \qquad (7.5.8)$$

证 部分地沿用题 846 的证法：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \int_a^x |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

（分部积分）

$$= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

比较(7.5.6)(7.5.8) 看出，(7.5.8) 右端要小 $\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$，因而较(7.5.6) 有显著改进．你自然会推想对题 847，848 亦可作同样改进，不过证明要由你自己来完成．

850 设 $f \in C^1[a,b]$，$f(b) = 0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)^2 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

851 设 $f \in C^1[a,b]$，$f(c)=0$，证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b (x-c)^2 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

852 设 $f \in C^1[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^c (x-a)^2 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_c^b (b-x)^2 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x. \quad (7.5.9)$$

提示：利用 $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ 并综合题 849 与 850.

注意不等式(7.5.9)强于(7.5.7). 这也表明，条件 $f(a)=f(b)=0$ 与 $f(c)=0$ 的作用大体相当. 利用(7.5.9)，你还可以进一步证明：

853 设 $f \in C^1[a,b]$，$f(a)=f(c)=f(b)=0$，则

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{32}(b-a)^2\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

下面由你来证明一些应用前述结论的具体不等式.

854 设 $f \in C^1[0,2\pi]$，$g(x)=f'(x)\sin x + f(x)\cos x$. 证明：

$$\int_0^b f^2(x)\sin^2 x\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi^2}{8}\int_0^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$b=\frac{\pi}{2},\pi,2\pi.$$

提示：应用题 844，850，851.

855 证明$\int_0^1 x^2(1-x)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 (1-2x)^2\mathrm{d}x$,并算出积分检验结论. $(1/30 < 1/24)$.

856 设$f \in C^1[0,a]$,$f(0)=f(a)=0$,证明

$$\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^{a/2}(a^2-4x^2)[|f'(x)|^2 + |f'(a-x)|^2]\mathrm{d}x.$$

提示:利用$\int_0^a = \int_0^{a/2} + \int_{a/2}^a$并用题849,850.

7.5.3 杂题

857 设$f \in C^2[0,1]$,$f(0)=f(1)=0$,$f(x)>0(0<x<1)$.证明$\int_0^1 |f''(x)/f(x)|\mathrm{d}x \geqslant 4$.

证 取$x_0 \in (0,1)$,使$f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)$,则$f(x_0)>0$,$f'(x_0)=0$,于是

$$f(x_0)=\int_0^{x_0} f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x_0}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{t} f''(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant x_0\int_0^{x_0}|f''(x)|\mathrm{d}x.$$

同理,$f(x_0)\leqslant(1-x_0)\int_{x_0}^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$.因此

$$f^2(x_0)\leqslant x_0(1-x_0)\int_0^{x_0}|f''(x)|\mathrm{d}x\int_{x_0}^1|f''(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1} x(1-x)\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^x|f''(t)|\mathrm{d}t\int_x^1|f''(t)|\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{16}\left[\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\right]^2.$$

于是

$$\int_0^1\frac{|f''(x)|}{|f(x)|}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x \geqslant 4.$$

858 设$f \in C^1[a,b]$,$f(a)=0$,证明

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{3}(b-a)^3\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

证 用分部积分及 Cauchy 不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = \left[\int_a^b (x-b)f'(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

$$\leqslant \frac{1}{3}(b-a)^3\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

7.6 用级数与积分证不等式

7.6.1 用级数证不等式

首先，Leibniz 型级数是不等式的一个重要来源. 设当 $k \geqslant 2n$ 时 a_k 严格下降趋于 0，$S = \sum_1^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$，则

$$\sum_1^{2n}(-1)^{k-1}a_k < S < \sum_2^{2n-1}(-1)^{k-1}a_k (n \geqslant 1). \tag{7.6.1}$$

n 取得愈大，不等式(7.6.1) 就愈精密(自然也愈复杂). 许多初等函数(如 $\sin x, \cos x, \ln(1+x), \mathrm{arctg} x$ 等) 的 Taylor 级数是 Leibniz 型级数(对一定的 x)，因此可建立形如(7.6.1) 的不等式.

859 证明 $1-\frac{x^2}{2} < \cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} (0 < x < \pi)$.

证 已知 $\cos x = \sum_0^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}/(2n)!$，只需验证单调性：当 $0 < x < \pi, n \geqslant 1$ 时，

$$\frac{\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} < \frac{\pi^2}{12} < 1.$$

利用上题及 $\sin x \leqslant x (x \geqslant 0)$ 可以证明：

860 证明 $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

证　注意当 $|x| \leqslant 1$ 时有 $\sin x \leqslant |x|$，因此

$$\sin(\cos x) \leqslant |\cos x| \leqslant 2^{-1}(1 + \cos^2 x) = 1 - 2^{-1}\sin^2 x \leqslant \cos(\sin x).$$

最后一个 $\leqslant$ 必为 $<$，否则由题859有 $\sin x = 0$，此时原不等式自动成立.

利用 $\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}x^n/n$ 你易证明：

861　证明 $x - 2^{-1}x^2 < \ln(1+x) < x - 2^{-1}x^2 + 3^{-1}x^3 (0 < x < 1)$.

因受收敛条件的约束，用级数法证明的不等式对变元的限制可能偏强. 如上题要求 $0 < x < 1$，而实际上它对所有 $x > 0$ 为真. 尽管如此，级数法还是因其明显与简捷而独具好处.

862　证明 $\sum_1^{2n}(-1)^{k-1}\dfrac{4}{2k-1}(2^{1-2k} + 3^{1-2k}) < \pi < \sum_1^{2n-1}(-1)^{k-1}\dfrac{4}{2k-1}(2^{1-2k} + 3^{1-2k})$.

证　与(7.6.1)对照看出，仅需指明

$$\sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{1}{2n-1}(2^{1-2n} + 3^{1-2n}) = \frac{\pi}{4}.$$

由展开式 $\operatorname{arctg} x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}x^{2n-1}/(2n-1)$，上式左边为

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{2.3}\right)}\right] = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

863　证明 $505/162 < \pi < 10/3$.

证　在题862中取 $n = 1$ 即得.

若 S 表为正项级数：$S = \sum a_n$，$a_n > 0$，则对 S 的估计要困难些. 为证 $B \leqslant S \leqslant C$，通常选取 b_n, c_n，使 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ 且 $B = \sum b_n$，$C = \sum c_n$. 因 b_n, c_n 的选择有很大灵活性，这一方法不太容易把握. 先看一个简单例子.

864 证明 $1 < \sum_1^\infty n^{-2} < 2$.

证 这由不等式 $[n(n+1)]^{-1} < n^{-2} < [n(n-1)]^{-1}$ 得出：

$$1 = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right] = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$$
$$< \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$

上题给出的估计显然太粗，若先提出前两项 $1 + 2^{-2}$ 然后用同一方法，则可得较好结果：

865 证明 $19/12 < \sum_1^\infty n^{-2} < 7/4$.

注：你若记得 $\sum_1^\infty n^{-2} = \pi^2/6$，则可将上题的不等式改写成 $\sqrt{19/2} < \pi < \sqrt{21/2}$，即 $3.08\cdots < \pi < 3.24\cdots$.

866 证明 $e < \sum_0^n (k!)^{-1} + (n!n)^{-1} (n \geqslant 1)$.

证 你必定记得 $e = \sum_0^\infty (k!)^{-1}$，于是只需指明：

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right]$$
$$< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right] = \frac{1}{n!n}.$$

对上题的不等式，现在给你一个直观印象. 以 b_n 记不等式之右端，则 $b_1 = 3, b_2 = 2.75, b_3 = 2.722\cdots, b_4 = 2.71875, \cdots$. 而 $e = 2.71828\cdots$.

作为上题的辅助结果，你能推出：

867 证明 $e = \sum_0^n (k!)^{-1} + \theta_n (n!n)^{-1}, 0 < \theta_n < 1 (n \geqslant 1)$.

868 证明 $3\ln[(1+x)/(1-x)] < (6x - 4x^3)/(1-x^2) (0 < x < 1)$.

证 利用 $\ln(1 \pm x)$ 的 Taylor 级数：

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_1^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$$

$$<2x+\frac{2x^3}{3}\sum_0^{\infty}x^{2n}=2x+\frac{2x^3}{3(1-x^2)}=\frac{6x-4x^3}{3(1-x^2)}.$$

869 证明 $\ln(1+x)<\dfrac{x^3+12x^2+12}{6(x+1)(x+2)}(x>0)$.

提示:令 $x=2t/(1-t)$ 并用上题.

870 证明 $\ln(1-x)>-\dfrac{x^3-12x^2+12}{6(1-x)(2-x)}(0<x<1)$.

提示:令 $t=x/(2-x)$,然后用题 868 之证法.

871 证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}<\exp\left[1+\frac{1}{12n(n+1)}\right](n\geqslant 1).$$

提示:以 $x(>0)$ 代 $1/n$,取对数后归结为题 869 中的不等式.

题 868～871 中的不等式皆可用 7.2 中的方法证明,但涉及较繁的导数计算,你不妨尝试一下.

7.6.2 用积分证不等式

最简单的方法是:若 $f(x)\leqslant g(x)$,$a<b$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;若 $f(x)<g(x)$,则后者亦可换为 $<$.

872 证明 $x<\arcsin x<x+3^{-1}x^3(0<x<0.78)$.

证 积分不等式 $1<(1-x^2)^{-1/2}<1+x^2(0<x<0.78)$ 即得.

你大概已经看出,不等式 $1<(1-x^2)^{-1/2}<1+x^2$ 正是要证不等式两边求导的结果,因而上面的证法实质上与 7.2 中的方法无异,而后者似乎更易掌握.不过对于下例就不能这么说了.

873 设 $f \in C[0,1]$，证明 $\exp\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right] \leqslant \int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

证 令 $a = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 用 7.3.1 中的方法可证 $e^x \geqslant x - 1(-\infty < x < \infty)$，因此 $e^{f(x)-a} \geqslant f(x) - a + 1$，于是

$$e^{-a}\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 [f(x) - a + 1]\mathrm{d}x = 1.$$

如果你充分理解了上面的证法，就能证：

874 设 $f \in C[0,1]$，$\varphi \in C(-\infty,\infty)$ 满足 $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)(1 + x - y)(-\infty < x, y < \infty)$，证明

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(x))\mathrm{d}x.$$

考虑单调函数的积分是导出不等式的另一重要方法. 此方法直观意义明显，比较容易把握. 例如，若 $f(x)(x > 0)$ 严格单调下降，则

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \sum\nolimits_1^n \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x < \sum\nolimits_1^n f(k)$$
$$< f(1) + \sum\nolimits_2^n \int_{k-1}^k f(x)\mathrm{d}x = f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.6.2}$$

若 $f(x)(x > 0)$ 严格增加，则类似地有

$$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x + f(1) < \sum\nolimits_1^n f(k) < \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + f(n). \tag{7.6.3}$$

选取适当的 f，可从(7.6.2)(7.6.3)得出一系列不等式.

875 证明 $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n + 1(n > 1)$.

证 取 $f(x) = 1/x$ 用(7.6.2)即得.

876 证明 $e(n/e)^n < n! < en(n/e)^n(n > 1)$.

证* 首先将要证不等式变成：

$n\ln n - n + 1 < \sum_1^n \ln k < (n+1)\ln n - n + 1.$

由此看出，取 $f(x) = \ln x$ 用(7.6.3) 可得所要不等式.

现在你可以解类似的问题了：

877 证明 $\frac{1}{p-1}[1-(n+1)^{1-p}] < \sum_1^n k^{-p} < 1 + \frac{1}{p-1}(1-n^{1-p})(p>1, n>1)$.

878 证明 $n^{p+1} - p < (p+1)\sum_1^n k^p < n^{p+1} + (p+1)n^p - 1(p>0, n>1)$.

其次考虑用凸(或凹)函数的积分证不等式. 若 $f''(x) > 0(f''(x) < 0)$，则可用题 734，785(786，787) 中的不等式，且可将其中的 $\leqslant$ 换成 $<$.

879 证明 $2(e^x - 1) < x(e^x + 1)(x > 0)$.

证 显然 $(e^x)'' = e^x > 0$，因此用题 784 有

$$e^x - 1 = \int_0^x e^t \mathrm{d}t < x \cdot \frac{e^x + e^0}{2} \quad (x > 0).$$

880 证明 $2\ln x < x^{-1}(x^2 - 1)(x > 1)$.

提示：利用 $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

注意以上两题均可用 7.2.1 的方法证明. 对于这类简单情况，运用积分的好处似乎不很明显. 下面的例题更能说明问题些.

881 证明 $\sum_1^n \left(\frac{k}{n}\right)^n > \frac{3n+1}{2n+2}(n > 1)$.

证 易想到要考虑函数 x^n 的积分：

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \sum_1^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} x^n \mathrm{d}x$$

$$< \sum_1^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k-1}{n}\right)^n + \left(\frac{k}{n}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_1^n\left(\frac{k}{n}\right)^n+\frac{1}{2n}$$，其中用到$(x^n)''>0$.

仿此，你可以证明：

882 证明$\sum_1^n e^{k/n}>(e-1)(n+2^{-1})\quad(n>1)$.

883 设$f''(x)>0(0<x<1)$，$f\in C[0,1]$. 证明

$$\sum_1^n f\left(\frac{k}{n}\right)>n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{f(1)+f(0)}{2}.$$

可仿照题 879 ～ 883 应用题 785，787 的结论，仅举一个例子：

884 证明$\sum_1^n\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^n<\frac{n}{n+1}(n>1)$.

证 类似于题 881，但用题 785：

$$\frac{1}{n+1}=\sum_1^n\int_{(k-1)/n}^{k/n}x^n\mathrm{d}x>\sum_1^n\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}+\frac{k-1}{n}\right)\right]^n.$$

7.7 用中值定理证不等式

7.7.1 应用 Lagrange 中值定理

设$a<b$，$f(x)$在$[a,b]$上可微，则$[f(b)-f(a)]/(b-a)=f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$，于是可依以下三种情况得出不等式.

(i) 若$A\leqslant f'(x)\leqslant B(a<x<b)$，则

$$A\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant B.\tag{7.7.1}$$

(ii) 若$f'(x)$单调增(如$f''(x)\geqslant 0$)，则

$$f'(a)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'(b).\tag{7.7.2}$$

(iii) 若$|f'(x)|\leqslant M(a<x<b)$，则

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leqslant M.\tag{7.7.3}$$

当条件中的$\leqslant$换成$<$时，(7.7.1) ～ (7.7.3) 中的$\leqslant$亦可换成

<. 若 $f(x)$ 单调减，则不等式(7.7.2)应反向.

不等式(7.7.1)～(7.7.3)给出对形如 $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ 的比值的估计，其特征非常明显，因此，适用情况一般是较易辨识的.

885 证明 $(b-a)/a<\ln(b/a)<(b-a)/a(0<a<b)$.

证 首先将要证不等式改写成

$$a^{-1}>\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>b^{-1},$$

由此看出只需对 $f(x)=\ln x$ 应用中值定理.

886 证明 $\frac{\ln x}{(n+1)\ln^2(n+1)}<\log_n x-\mathrm{lon}_{n+1}x<\frac{\ln x}{n\ln^2 n}(x,n>1)$.

证 初看起来要证不等式似乎与(7.7.1)～(7.7.3)差别甚大，但适当改写以后就显出接近(7.7.2)了：

$$-\frac{1}{n\ln^2 n}<\frac{[\ln(n+1)]^{-1}-(\ln n)^{-1}}{(n+1)-n}$$
$$<-\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

余下的事情只是对 $f(t)=1/\ln t$ 应用中值定理并指出 $f'(t)(t>1)$ 严格增.

你不难解类似的问题：

887 证明 $\sqrt[n+1]{a}/(n+1)^2<(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})/\ln a<\sqrt[n]{a}/n^2(a>1,n\geqslant 1)$.

应用(7.7.3)的简单例子是：

888 证明 $|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y|\leqslant|x-y|$.

颇感困难的是应用中值定理的可能性不很明显的那些情况，此时需要某些变换技巧.

889 证明 $\mathrm{tg}y/\mathrm{tg}x>y/x(0<x<y<\pi/2)$.

证 首先注意要证不等式可变成

$$\frac{\text{tg}y - \text{tg}x}{y - x} > \frac{\text{tg}x}{x}.$$

令 $f(t) = \text{tg}t$，则 $f'(t) = \text{sce}^2 t (0 < t < \pi/2)$ 严格增，于是

$$\frac{\text{tg}y - \text{tg}x}{y - x} > \frac{1}{\cos^2 x} \geqslant \frac{\text{tg}x}{x}.$$

注：上题亦可从 $(\text{tg}x/x)' > 0$ 证明.

890 证明 $x/(1+x) < \ln(1+x) < x(-1 < x < 0)$.

提示：要证不等式可写成：

$$1 < \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1} < \frac{1}{1+x}.$$

891 设 $f'(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上单减，$f(0) = 0$，证明 $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) (x, y \geqslant 0)$.

证 不妨设 $y \geqslant x > 0$，于是

$$\begin{aligned}
&f(x) + f(y) - f(x+y) \\
&= [f(x) - f(0)] - [f(x+y) - f(y)] \\
&= x[f'(\xi) - f'(\eta)] \geqslant 0 (0 < \xi < x, y < \eta < y + x).
\end{aligned}$$

892 设 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单调增，$x, y \in (a,b)$，证明 $f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y) (0 \leqslant \lambda = 1 - \mu \leqslant 1)$.

证 不妨设 $x < y$，令 $z = \lambda x + \mu y$，则

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x) + \mu f(y) - f(z) \\
&= \mu[f(y) - f(z)] - \lambda[f(z) - f(x)] \\
&= \mu f'(\xi)(y - z) - \lambda f'(\eta)(z - x) \\
&= \lambda\mu(y - x)[f'(\xi) - f'(\eta)] \geqslant 0,
\end{aligned}$$

其中 $\xi \in (z, y)$ 与 $\eta \in (x, z)$ 由中值定理得出.

以上两题的证法可归于如下一般模式：欲证 $A \leqslant B$，先将 $B - A$ 表为形如 $f(b) - f(a)$ 的式子的线性组合，然后分别对每项应用中值定理，再利用 $f'(x)$ 的一定单调性质得出 $B - A \geqslant 0$.

7.7.2 应用 Cauchy 中值定理

设 $a<b$，f,g 在 $[a,b]$ 上可微，$g'(x)\neq 0(a<x<b)$，则 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$[f(b)-f(a)]/[g(b)-g(a)]=f'(\xi)/g'(\xi)$. 据此可依三种情况得出不等式(参照(7.7.1)～(7.7.3)：

(i) 若 $f'(x)$ 单调增，$g'(x)$ 单调减，则

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\leqslant\frac{f'(b)}{g'(b)}. \tag{7.7.4}$$

(ii) 若 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 皆单调增，则

$$\frac{f'(a)}{g'(b)}\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\leqslant\frac{f'(b)}{g'(a)}. \tag{7.7.5}$$

(iii) 若 $N\leqslant f')x)/g'(x)\leqslant M(a<x<b)$，则

$$N\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\leqslant M. \tag{7.7.6}$$

若(i)(ii)中的单调性条件换成严格单调，则(7.7.4)(7.7.5)成为严格的不等式. 若(iii)之条件中 $\leqslant$ 换成 $<$，则(7.7.6)中 $\leqslant$ 换为 $<$.

893 证明 $1-2^{-1}x^2<\cos x<1-\pi^{-1}x^2(0<x<\pi/2)$.

证 首先将要证不等式改写成

$$-\frac{1}{2}<\frac{\cos x-\cos 0}{x^2-0^2}<-\frac{1}{\pi}.$$

令 $f(x)=\cos x$，$g(x)=x^2$，应用(7.7.6)与题 773 即得.

894 证明 $\pi^{-1}x(\pi-x)<\sin x<2^{-1}x(\pi-x)(0<x<\pi)$.

证 只需考虑 $0<x<\pi/2$. 令 $f(x)=\sin x$，$g(x)=x(\pi-x)$，则

$$\frac{1}{\pi}<\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\cos x}{\pi-2x}=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}<\frac{1}{2},$$

据此用(7.7.6)即得所要证.

7.8 杂　题

895 设 f 是以 T 为周期的连续函数，$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$，$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|(\infty<x,y<\infty)$. 证明 $|f(x)|\leqslant LT/2$.

证 取 $c\in[0,T]$，使 $|f(c)|=\max|f(x)|$，则

$$|f(x)|\leqslant|f(c)|=\frac{1}{T}\left|\int_0^T f(c)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{T}\left|\int_0^T[f(c)-f(x)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{T}\int_0^T|f(c)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{L}{T}\int_0^T|c-x|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{L}{T}\left[\int_0^c(c-x)\mathrm{d}x+\int_c^T(x-c)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{L}{2T}[c^2+(T-c)^2]\leqslant LT/2.$$

896 设 $|f(x)|\leqslant\pi,f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$. 证明

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

证 设 $A=f(a),B=f(b)$，φ 是 f 的反函数，则 $0<\varphi'(y)\leqslant 1/m$，

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_A^B\varphi'(y)\sin y\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\int_0^\pi\frac{1}{m}\sin y\mathrm{d}y=\frac{2}{m}.$$

897 设 $f\in C(-\infty,\infty),f(x)\geqslant 0$，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0$，$a\leqslant 0$，证明 $\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1+a^2}$.

证 可设 $a<0$,证明由如下推演完成:

$$a^{-2}(1+a^2)^2\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x=(a+a^{-1})^2\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}(x+a^{-1})^2f(x)\mathrm{d}x=a^{-2}(1+a^2).$$

898 设 $f'(x)=1/[f^2(x)+x^2]$,$f(1)=1$,证明

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\leqslant 1+\frac{\pi}{4}.$$

证 首先由 $f'(x)>0$ 推出 $l=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 必存在. 其次,由 $f(x)\geqslant f(1)=1(x\geqslant 1)$ 推出 $f'(x)\leqslant 1/(1+x^2)$,因此当 $x\geqslant 1$ 时有

$$f(x)=f(1)-\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t<1+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$=1+\operatorname{arctg}x-4^{-1}\pi<1+4^{-1}\pi,$$

由此得出所要证.

第八章　等式之证明

在数学中，大概没有比“等式”更重要的东西了．实际上，解数学题时你几乎是不断地在用等号，而等号连结的式子就是等式！等式出现得如此普遍，其形式如此多样，要将其类型与用法作出简单的概括恐怕是没有希望的．本章仅考虑有关等式的一个课题：等式之证明，这是你解数学题无法回避且往往为之头痛的问题，你会希望获得一些诀窍，最好有某种通行无阻的方法．这后一个愿望可能会落空——万能的方法是不会有的，任何方法都有其局限性．本章决意要为你提供的，是在一定范围内行之有效的方法．一方面，我们要就你选择证明等式的方式提出一些原则性的建议，这些建议被实践证明是非常有益的．另一方面，就大学数学中最常遇到的等式的证明题，分别给出证明方法．如果你能充分理解与熟练运用这些方法，那么曾使你头痛的等式证明问题将会变得比较容易且有趣．

8.1　等式证明的若干通则

本节提供证明等式的某些要领，它们不涉及等式的具体内容，因而适用于数学的各个领域，故名为“通则”．但如同任何通则一样，此处所提供的一些原则只能是初步的指南，它们指出思考的方向，进一步的思路依赖于更具体的知识与方法，这将在随后几节中逐一介绍．

8.1.1 证明等式之途径

你现在面对要证明的等式：$A = B$，A，B 是同类数学对象（如数、函数、向量、矩阵等）. 从逻辑形式（而不是具体内容）上考虑，有如下证明途径可供你选择：

(i) 自左至右：$A = A_1 = A_2 = \cdots = B$.

(ii) 自右至左：$B = B_1 = B_2 = \cdots = A$.

(iii) 中介过渡：$A = C$ 且 $B = C$.

(iv) 等价替换：$A = B \Leftrightarrow A_1 = B_1$

(v) 不等式替换：$A = B \Leftrightarrow A \leqslant B$ 且 $B \leqslant A$.

最好是用一些例子来解释. 首先看“自左至右”的例子：

899 证明 $\sum_1^\infty 1/n2^n = \ln 2$.

证 左边是一个容易求和的级数：

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

以上证法似乎含有“从繁至简”之意，但以此作为一般原则却未必合适.

900 证明

$(e^{ax}\cos bx)^{(n)} = (a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\cos(bx + n\operatorname{arctg}(b/a))$.

证 尽管右边较繁，但还是以“从左到右”为宜：

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{1}{2}(e^{ax+ibx} + e^{ax-ibx})^{(n)} \\
&= \frac{1}{2}[(a+ib)^n e^{ax+ibx} + (a-ib)^n e^{ax-ibx}] \\
&= \frac{1}{2}e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}[(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos bx + i\sin bx) \\
&\quad + (\cos n\varphi - i\sin n\varphi)(\cos bx - i\sin bx)] \\
&= e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}(\cos n\varphi\cos bx - \sin n\varphi\sin bx) \\
&= (a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\cos(bx + n\operatorname{arctg}(b/a)) = \text{右边},
\end{aligned}$$

其中已命 $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$.

若 A,B 形式上差异甚大、难以直接比较，则通过一“中介”过渡以达到 $A=B$，例如，

901 证明$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\sqrt{2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{n/2}}$.

证 分别计算两边：

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2});$$

$$\ln\sqrt{2} + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}/n2^{n/2} = \ln\sqrt{2} + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \ln(1+\sqrt{2}),$$

可见要证等式成立.

你从本书获得的主要启示可能是：如果你不能直接解某问题，就请转化它吧！无所不在的“转化”，在等式证明中亦起主要作用. 如果你不能直接证明 $A=B$，就将它转化成另一个与之等价但较易证明的等式 $A_1=B_1$，最简单的转化是化 $A=B$ 为 $A-B=0$，或 $A/B=1$（A/B 有意义），或 $\ln A=\ln B$（若 $A,B>0$）. 较特殊的转化依赖于 A、B 的具体形态.

902 证明 $\sum_0^\infty \ln(1+2^{-2^n}) = \sum_1^\infty [2\ln(n+1) - \ln n - \ln(n+2)]$.

证 以乘积代替级数，要证等式化为：

$$\prod_0^\infty (1+2^{-2^n}) = \prod_1^\infty \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

由 $$(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = 1-x^{2^{n+1}}$$

得出$\prod_0^\infty (1+2^{-2^n}) = 1/(1-\frac{1}{2}) = 2$. 另一方面，由

$$\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdots\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$
$$= \frac{2(n+1)}{n+2}$$

得 $\prod_1^\infty (n+1)^2 n^{-1}(n+2)^{-1} = 2$，因此原等式成立.

903 设 $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$，$A^k = 0$，$I$ 是 n 阶单位矩阵. 证明 $(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{k-1}$.

证 只要证 $(I - A)(I + A + \cdots + A^{k-1}) = I$，而这由 $A^k = 0$ 直接推出.

904 设 $A, B \in \mathrm{R}^{n\times n}$，$I + AB$ 可逆，证明

$$(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A.$$

提示：只要证 $(I + BA)[I - B(I + AB)^{-1}A] = I$.

更引人的转化或许要算以"$A \leqslant B$ 且 $B \leqslant A$"替换"$A = B$". 表面上看这似乎使问题复杂化了，但在一定情况下很有效，有时甚至是唯一可行的途径.

905 设 $f(x)$ 在 $c \in (a,b)$ 取极小值且 $f'(c)$ 存在，证 $f'(c) = 0$.

证 由导数定义与 $f(c)$ 的极小性得

$$f'(c) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(c + x) - f(c)}{x} \geqslant 0;$$

$$f'(c) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(c - x) - f(c)}{-x} \leqslant 0.$$

综合起来得出 $f'(c) = 0$.

906 设 $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是给定实数. 设对任何实数 $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 有 $\sum a_i x_i = 0$，证明 $a_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

证 取定 $i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 取 $x_i = 1, x_j = 0 (j \neq i)$，则 $a_i = \sum_1^n a_j x_j \geqslant 0$. 设 $y_j = -x_j (1 \leqslant j \leqslant n)$，则 $a_i = -\sum_1^n a_j y_j \leqslant 0$. 因此 $a_i = 0$.

8.1.2 由已知等式导出新等式

除了转化为不等式证明这一比较特殊的途径之外，等式之证明本质上是运用种种规则从已知等式推出新的等式. 尽可能

熟悉那些常用的等式(通常称为"公式"),对于等式的证明自然是必不可少的.基本的公式可例举如下:

代数恒等式,如

$$(a+b)^n = \sum_0^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k};$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}).$$

三角公式,如

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

积分公式,如 Newton-Leibniz 公式,Green 公式,Stokes 公式及 Gauss 公式等.

和公式,如

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

由已知等式导出新等式的主要途径如下:

(i) $A = B \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$,只要 $\varphi(A)$ 有定义.

(ii) $f(x) = g(x) \Rightarrow f(\varphi(t)) = g(\varphi(t))$,只要 $f(\varphi(t))$ 有定义.

(iii) $f(x) = g(x) \Rightarrow \lim f(x) = \lim g(x)$,只要极限存在.

(iv) $f(x) = g(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)$,只要导数存在.

(v) $f(x) = g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,只要积分存在.

以上结论如此明显,几乎不值一提.然而,在具体问题中能否运用自如就未必了.你在看下列例题时不妨检测一下自己.

907 证明 $\operatorname{arctg}[(1+x)/(1-x)] - \operatorname{arctg}x = \pi/4(x < 1)$

证 你必定记得和角公式

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

令 $x=\operatorname{tg}\alpha, y=\operatorname{tg}\beta$，当 $|\alpha+\beta|<\pi/2$ 时从上式得

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy};$$

再令 $y=1$ 即得所要等式.

908 证明 $1+2x+\cdots nx^{n-1}=(1-x)^{-2}[1-(n+1)x^n+nx^{n+1}](x\neq 1)$.

证 你只需对已知的等式两边求导：

$$x+x^2+\cdots+x^n=(x-x^{n+1})/(1-x).$$

909 证明

$$\sum_1^n k\cos kx=\left(n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}\right)\Big/2\sin^2\frac{x}{2}.$$

提示 利用 $\sum_1^n \sin kx=\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\Big/\sin\frac{x}{2}$.

910 设 $f,g\in C^1[a,b]$，证明分部积分公式：

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

提示：利用 Leibniz 公式 $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

911 证明 $\sum_0^n(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!=0$.

提示：利用 $(a+b)^n=\sum_0^n(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

8.1.3 证 $u=0$ 之方法

原则上，任何等式一般总可能化为 $u=0$ 的形式. 因此，证 $u=0$ 之方法有基本的重要性. 以下四种方法是特别值得推荐的：

(i) 不等式法：证 $u\geqslant 0$ 且 $u\leqslant 0$.

(ii) 极限法：证 $|u|\leqslant x_n(\forall\ n\geqslant 1)$ 而 $x_n\to 0$.

(iii) 微分法：证 $u'=0$ 且对某个 x_0 有 $u(x_0)=0$.

(iv) 积分法：证 $\int_a^b u^2\mathrm{d}x=0$（假定 $u\in C[a,b]$）.

其中(iii) 是最重要的方法，将在下节中专门讨论. 对其它几

种方法例释如下. 题 905 就是应用方法(i) 的例子. 其次考虑方法(ii),这种证法往往能引人入胜.

912 设 $f \in C[0,1]$ 且 $|f'(x)| \leqslant |f(x)|(x>0)$, $f(0)=0$, 证明 $f(x)=0(0<x<1)$.

证 取定 $x \in (0,1)$, 由中值定理, 有 $x_1 \in (0,x)$, 使 $f(x)=f(x)-f(0)=xf'(x_1)$; 同理有 $x_2 \in (0,x_1)$, 使 $f(x_1)=x_1 f'(x_2)$, 从而 $|f(x)| \leqslant x|f(x_1)| \leqslant x^2|f(x_2)|$. 如此继续, 得出 $x>x_1>x_2>\cdots>x_n>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant x^n|f(x_n)|$. 因 f 在 $[0,1]$ 上有界, 故 $x^n f(x_n) \to 0$, 因此 $f(x)=0$.

对于上题, 若不用极限法而直接证明 $f(x)=0$, 恐怕不易, 你不妨一试!

转而看应用积分法的例子.

913 设 $f \in C[a,b]$, $\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0(n \geqslant 0)$, 证明 $f(x) \equiv 0$.

证 由条件推出, 对任何多项 $P(x)$ 有 $\int_a^b P(x) \cdot f(x)\mathrm{d}x = 0$, 取一致收敛于 $f(x)$ 的多项式序列 $\{P_n(x)\}$, 由 $\int_a^b P_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ 推出

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_n P_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b P_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

因此 $f(x) \equiv 0$.

方法(iv) 中的 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$ 可换成 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = 0$(但不能换成 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$!), 不过后者未必更易证些.

方法(iv) 的一个拓广是: 若要证 $a_i = 0(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则只需

证 $\sum a_i^2 = 0$.

914 设 A 是 n 阶对称实矩阵,$A^2 = 0$,证明 $A = 0$.

证 取定 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$. 设 $A = (a_{kj})$,则由 $a_{kj} = a_{jk}$ 与 $A^2 = 0$ 得出

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2,$$

因此 $a_{ik} = 0(1 \leqslant k \leqslant n)$,从而 $A = 0$.

8.2 用微分法证等式

如你所熟知,证 $f(x) = 0(a < x < b)$ 可归于证

$$f'(x) = 0(a < x < b) \text{ 且 } f(x_0) = 0(\exists\ x_0 \in (a,b)) \tag{8.2.1}$$

这就是用微分法证等式的基本原理.这个原理如此简单,且被如此广泛应用,以至其使用步骤已完全标准化,可概括如下:

(i) 将要证等式作适当变形与简化,写成 $f(x) = 0(a < x < b)$,务必使 $f(x)$ 尽可能简单以便于求导.当等式含多个参数时应以最有利的方式确定自变量 x.

(ii) 求出 x_0,使 $f(x_0) = 0$(通常用观察法).

(iii) 求出 $f'(x)$ 并证明 $f'(x) = 0(a < x < b)$.

若仍不易断定 $f'(x) = 0$,则进而转化成证

$$f''(x) = 0(a < x < b), f'(x_1) = 0(\exists\ x_1 \in (a,b)) \tag{8.2.2}$$

必要时依次考虑更高阶导数,恰如在 7.2 中证不等式时所作的一样.

如果要证者为 $f(x) = c(a < x < b)$,则以上所述仅需稍许修改即可.

8.2.1　初等恒等式之证明

关于初等函数的许多恒等式可用本节的方法作出很简单的证明.

915　没 $x^2 + y^2 \leqslant 1$,证明

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}). \tag{8.2.3}$$

证　$y^2 = 1$ 时(8.2.3)显然成立.固定 $y \in (-1,1)$,在 $|x| \leqslant \sqrt{1-y^2}$ 上考虑函数

$$f(x) = \arcsin x + \arcsin y - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

显然 $f(0) = 0$,余下的事情只是验明:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-y^2} - xy\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy}{\sqrt{(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy)^2}}\right] = 0$$

916　证明 $\operatorname{arcsh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ $(|x| < \infty)$.

证　令 $f(x) = \operatorname{arcsh}x - \ln(x + \sqrt{1-x^2})$,则 $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

你一定有兴趣去证下列等式.

917　证明 $\arcsin x = \operatorname{arctg}(x/\sqrt{1-x^2})$ $(|x| < 1)$.

918　证明 $2\operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}[2x/(1-x^2)]$ $(|x| < 1)$.

919　证明 $\operatorname{arcsh}x = \operatorname{arcth}(x/\sqrt{1+x^2})$ $(|x| < \infty)$.

920　证明 $2\operatorname{arcth}x = \ln[(1+x)/(1-x)]$ $(|x| < 1)$.

8.2.2　某些非初等函数恒等式之证明

一些含由积分或级数表示的非初等函数的恒等式通常用微分法证明.

921 设 $f(x)=\int_2^x(\ln t)^{-1}\mathrm{d}t$，证明 $\int_1^x t^{-1}e^t\mathrm{d}t=f(e^x)-f(e)(x>0)$.

证 令 $F(x)=\int_1^x t^{-1}e^t\mathrm{d}t-f(e^x)+f(e)$，则 $F(1)=0$，$F'(x)=x^{-1}e^x-e^xf'(e^x)=0$，因此要证等式成立.

922 设 $f(x)=\int_1^x(1+t)^{-1}\ln t\mathrm{d}t$，证明 $f(x)+f(x^{-1})=2^{-1}\cdot\ln^2x(x>0)$.

证 令 $F(x)=f(x)+f(x^{-1})-2^{-1}\ln^2x$，则 $F(1)=0$，

$$F'(x)=f'(x)-x^{-2}f'(x^{-1})-x^{-1}\ln x$$
$$=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x^2}\frac{\ln x}{1+x^{-1}}-\frac{\ln x}{x}=0.$$

以上两题均可用积分的变量代换法证明，你可加以对照. 用微分法证即使不更简短，也有完全规范化的好处.

923 设 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$，证明 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)(\alpha>0)$.

证 令 $f(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)-\alpha\Gamma(\alpha)$，则

$$f(1)=\Gamma(2)-\Gamma(1)=-\int_0^{\infty}(xe^{-x})'\,\mathrm{d}x=0;$$

$$\Gamma'(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}e^{-x}\ln x\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-x}\ln x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\alpha}[\Gamma'(\alpha+1)-\Gamma(\alpha)],$$

由此得出 $f'(\alpha)=\Gamma'(\alpha+1)-\Gamma(\alpha)-\alpha\Gamma'(\alpha)=0$，因此 $f(\alpha)=0$.

924 设 $f(x)=\sum_1^{\infty}n^{-2}x^n$，证明 $f(x)+f(1-x)+$

$\ln x\ln(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6}(0<x<1)$

证　令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)(0<x<1)$. 因 $f'(x)=\sum_1^\infty n^{-1}x^{n-1}=-x^{-1}\ln(1-x)(0<x<1)$, 故

$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+x^{-1}\ln(1-x)-(1-x)^{-1}\ln x$$
$$=0$$

注意到 $\pi^2/6=\sum_1^\infty n^{-2}=f(1)$, 似乎应指明 $F(1)=f(1)$, 但 $F(1)$ 无定义, 不过, 可用极限代替:

$$\lim_{x\to 1}F(x)=f(1)+f(0)-\lim_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)$$
$$=f(1)+\lim_{x\to 0}x\ln x\cdot\frac{\ln(1-x)}{x}=f(1).$$

925　设 $f(x)=\sum_1^\infty x^n/(n\cdot n!)$, 证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(x)-e^x+x+1$.

证　令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+e^x-x-1$, 则 $F(0)=0$. 因 $f'(x)=\sum_1^\infty x^{n-1}/n!=(e^x-1)/x$, 故 $F'(x)=-xf'(x)+e^x-1=0$, 因此 $F(x)\equiv 0$.

注　上题亦可通过变换级数 $\sum_1^\infty x^{n+1}/n\cdot(n+1)!\ (=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)$ 来证明, 但不如用微分法直截了当.

8.2.3　某些积分等式之证明

积分等式之证明是一大课题, 较全面的讨论将在 8.5 节进行. 此处只考虑那些直接用微分法证明的积分等式, 这种情况很容易被忽略. 首先看一个简单例子.

926　设 $f\in C[a,b]$, 证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

证 以 x 代等式中的 b，作函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_t^x f(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2,$$

则 $F(a) = 0$，$F'(x) = f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = 0$，因此 $F(x) = 0 \ (a \leqslant x \leqslant b)$，特别 $F(b) = 0$，这正是所要证.

值得注意的是，上题要证等式两边并非变量，似乎无从应用微分法. 但转化为证

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_t^x f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2 (a \leqslant x \leqslant b)$$

之后，用微分法就很自然了. 以 x 代 b，看来是"略施小技"，但很快解决了问题. 从下面的例题中你将进一步看到，以上简单做法非常有效.

927 设 $f \in C[a,b]$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y\int_y^b f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^3.$$

证 仿题 926 之证，令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_t^x f(y)\mathrm{d}y\int_y^x f(z)\mathrm{d}t - \frac{1}{6}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^3,$$

则 $F(a) = 0$.

$$F'(x) = \int_a^x f(t)\left[\int_t^x f(y)\mathrm{d}y\int_y^x f(z)\mathrm{d}z\right]_x' \mathrm{d}t - \frac{f(x)}{2}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2$$

$$= f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_t^x f(y)\mathrm{d}y - \frac{f(x)}{2}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2 = 0$$

（利用题 926），因此 $F(b) = F(a) = 0$.

928 设 $f \in C[a,b]$，证明

$$\int_a^b f(x_1)\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^b f(x_2)\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_{n-1}}^b f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^n.$$

提示：微分一次并用归纳法.

现在你能解对应于题 926 -- 928 的类似问题.

929 设 $f \in C[a,b]$，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y\int_a^y f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^3$.

930 设 $f \in C[a,b]$，证明

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x \mathrm{d}y\int_a^y f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

证 令

$$F(x) = \int_a^x \mathrm{d}t\int_a^t \mathrm{d}y\int_a^y f(z)\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$F'(x) = \int_a^x \mathrm{d}y\int_a^y f(z)\mathrm{d}z - \int_a^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t;$$

$$F''(x) = \int_a^x f(z)\mathrm{d}z - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

这与 $F(a) = F'(a) = 0$ 一起推出 $F(b) = 0$.

注 若利用题 568，则上述证明中不必用 $F''(x)$.

用归纳法，你可解类似的问题：

931 设 $f \in C[a,b]$，证明

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f(x)\mathrm{d}x.$$

932 设 $f \in C[a,b]$，证明

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_{x_1}^b \mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_{n-1}}^b f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (x-a)^{n-1} f(x)\mathrm{d}x.$$

933 设 $f \in C[a,b]$，$n \geqslant 1$，证明

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x (x-y)^{n-1} f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{n}\int_a^b (b-x)^n f(x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $F(x) = \int_a^x \mathrm{d}t\int_a^t (t-y)^{n-1} f(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{n}\int_a^x (x-t)^n f(t)dt$，则

$$F'(x)=\int_a^x (x-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y-\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t=0,$$

因此 $F(b)=F(a)=0$.

934 设 $f\in C^2[a,b]$,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)\cdot\frac{f(a)+f(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)(t-a)f''(t)dt$,则

$$2F'(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(x)$$

$$+\int_a^x (t-a)f''(t)\mathrm{d}t;$$

$$2F''(x)=-(x-a)f''(x)+(x-a)f''(x)=0,$$

这与 $F(a)=F'(a)=0$ 一起推出 $F(b)=0$.

注 上题直接推出题 784,786 中的不等式,且提供了更精确的信息.

8.3 含偏导数的等式之证明

给定函数 $z=z(x,y)$(它由显式或隐式给定),验证 z 满足某个"偏微分方程"

$$F(x,y,z,z_x,z_y,\cdots)=0 \qquad (8.3.1)$$

的问题是微分学的基本演算之一.最常规的方法是,逐一算出(8.3.1)中出现的所有偏导数,然后以之代入(8.3.1)验证其为等式.这样的演算可能繁琐,但绝无实质性困难,对于这类问题看来是无话可说了.然而你可能会琢磨:能否免除偏导数计算?

本节正是要告诉你，至少在某些特殊情况下，这是完全可能的.

8.3.1 全微分法

你从微积分学中得知，$z = z(x,y)$ 的全微分，不过是 $dz = z_x dx + z_y dy$ 这一简单表达式而已. 实际上，全微分是微积分学中最微妙、最难以捉摸的概念之一. 有许多方法检验你从微积分课程中是否获得对全微分概念的正确理解，其中之一是：你能确认 dz 是 x,y,dx,dy 的"四元函数"吗？不管你曾否这样认为，从现在起你得接受这一看法，它完全正确！但我们没有篇幅详谈. 那么这种理解有什么实际好处呢？这就是：可以完全按自己的需要去指定 dx,dy 的值. 你必须记住，如同 x,y 一样，dx,dy 也是独立的变量！

若方程(8.3.1)只含一阶导数且对 z_x,z_y 是线性的，则它可写成：

$$a(x,y,z)z_x + b(x,y,z)z_y = c(x,y,z). \tag{8.3.2}$$

另一方面，在等式 $dz = z_x dx + z_y dy$ 中不防取 $dx = a(x,y,z)$，$dy = b(x,y,z)$，从而

$$az_x + bz_y = dz\big|_{dx=a,dy=b}. \tag{8.3.3}$$

比较(8.3.2)看出，z 满足(8.3.2)当且仅当

$$dz\big|_{dx=a,dy=b} = c(x,y,z). \tag{8.3.4}$$

这就得到证明等式(8.3.2)的如下方法：

(i) 对给出 z 的表达式求全微分；

(ii) 以 $dx = a,dy = b$ 代入，整理化简后得出所要证的等式.

此方法中最具戏剧性因而易引起争议的是第(ii)步. 实际上，这一步没有任何神秘之处，问题在于对全微分概念应有真正的理解.

现在你该实际体验一下上述方法的效果了. 下面假定涉及

的函数有足够的可微性.

935 设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{arctg}(1/\sqrt{x^2+y^2})$，证明 $yz_x=xz_y$.

证 将 z 表为 $z=f(x^2+y^2)$，则

$$\mathrm{d}z=2f'(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).$$

以 $\mathrm{d}x=y,\mathrm{d}y=-x$ 代入得 $yz_x-xz_y=0$，恰如所要证.

注意上题中 f 的具体表达式不起任何作用. 若详细写出 z_x、z_y（你试试看！），是很麻烦的. 以下几题属类似情况.

936 设 $z=f(\mathrm{arctg}xy,e^{\sin xy})$，证明 $xz_x=yz_y$.

提示：改写为 $z=\varphi(xy)$.

937 设 $z=f(\sin x-\sin y)+\sin y$，证明 $z_x\sec x+z_y\sec y=1$.

938 设 $z=y/f(x^2-y^2)$，证明 $x^{-1}z_x+y^{-1}z_y=zy^{-2}$.

证 对等式 $zf=y$ 微分得

$$f\mathrm{d}z+2z(x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y)f'=\mathrm{d}y.$$

以 $\mathrm{d}x=x^{-1},\mathrm{d}y=y^{-1}$ 代入，整理后得所要证.

939 设 $z=yf(x^2-y^2)$，证明 $y^2z_x+xyz_y=xz$.

940 设 $z=e^yf(y\exp(x^2/2y^2))$，证明 $(x^2-y^2)z_x+xyz_y=xyz$.

证 令 $u=x^2/2y^2$，微分等式 $e^{-y}z=f(ye^u)$ 得：

$$e^{-y}(\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y)=e^u(\mathrm{d}_y+y\mathrm{d}u)f'(ye^u).$$

以 $\mathrm{d}x=x^2-y^2,\mathrm{d}y=xy$ 代入，上式右端成为零，于是

$$(x^2-y^2)z_x+xyz_y=z\mathrm{d}y|_{\mathrm{d}y=xy}=xyz.$$

941 设 $ax+by+cz=f(x^2+y^2+z^2)$，$c\neq 2zf'$，证明 $(cy-bz)z_x+(az-cx)z_y=bx-ay$.

证 令 $u=x^2+y^2+z^2$，微分 $ax+by+cz=f(u)$ 得：

$a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z=2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)f'(u)$.

以 $\mathrm{d}x = cy - bz, \mathrm{d}y = az - cx$ 代入上式，整理后得

$$[c - 2zf'(u)](ay - bx + dz) = 0,$$

因此　$\mathrm{d}z = bx - ay$，此即所要证.

你能类似地解以下几题.

942　设 $x^2 + y^2 + z^2 = yf(z/y), f'(z/y) \neq 2z$，证明

$$(x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz_y = 2xz.$$

943　设 $F(x - y, y - z, z - x) = 0, F'_2 \neq F'_3$，证明 $z_x + z_y = 1$.

944　设 $F(u^2 - x^2, u^2 - y, u^2 - z^2) = 0, F'_1 + F'_2 + F'_3 \neq 0$，证明 $x^{-1}u_x + y^{-1}u_y - z^{-1}u_z = u^{-1}$.

证　微分 $F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2) = 0$ 得

$$(F'_1 + F'_2 + F'_3)u\mathrm{d}u = F'_1x\mathrm{d}x + F'_2y\mathrm{d}y + F'_3z\mathrm{d}z.$$

以 $\mathrm{d}x = x^{-1}, \mathrm{d}y = y^{-1}, \mathrm{d}z = z^{-1}$ 代入即得所要证.

945　设 $u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y - z, z - x)$，证明 $u_x + u_y + u_z = xyz$.

8.3.2　齐次函数法

若 $u(x,y)$ 是 α 次齐次函数：$u(tx,ty) = t^\alpha u(x,y)$，则对此等式关于 t 求导后置 $t = 1$ 得出：

$$xu_x + yu_y = \alpha u; \tag{8.3.5}$$

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = \alpha(\alpha - 1)u. \tag{8.3.6}$$

在这种情况下，为得出等式(8.3.5)(8.3.6)不仅不必求出偏导数，甚至不必用到 u 的具体表达式. 将此方法稍作推广，可解如下更一般的问题：

946　设 $u(x,y), a(t), b(t), c(t), d(t)$ 是可微函数，$a(1) = b(1) = 1, u(a(t)x, b(t)y) = c(t)u(x,y) + d(t)v$，证明

$$a'(1)xu_x + b'(1)yu_y = c'(1)u + d'(1)v.$$

证　对所给等式关于 t 求导后置 $t=1$ 即得.

在具体情况下应用上题证法的关键在于写出一个适当的含 t 的恒等式. 且看一些例子. 下面仍假定可微性条件总是满足的.

947　设 $u=x^n f(yx^{-2})$，证明 $xu_x+2yu_y=nu$.

证　只需指出 $u(tx,t^2y)=t^n u(x,y)$.

仿此，你不难解：

948　设 $u=xy\arcsin[xy^2/(x^2+y^4)]$，证明 $2xu_x+yu_y=3u$.

949　设 $u=x^n f(x^{-\alpha}y,x^{-\beta}z)$，证明 $xu_x+\alpha yu_y+\beta zu_z=nu$.

提示：利用 $u(tx,t^\alpha y,t^\beta z)=t^n u(x,y,z)$.

950　设 $u=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，证明 $xu_x+yu_y=1/2$.

证　只需指明 $u(tx,ty)=u(x,y)+\frac{1}{2}\ln t(t>0)$.

951　设 $u=xyz^{-1}\ln x+xf(yx^{-1},zx^{-1})$，证明 $xu_x+yu_y+zu_z=u+xyz^{-1}$.

提示：利用 $u(tx,ty,tz)=tu(x,y,z)+xyz^{-1}t\ln t(t>0)$.

952　设 $u=x^{-2}y^{-1}(x+y)\ln[xy/(x+\sqrt{x^2+y^2})](xy>0)$，证明 $xu_x+yu_y=x^{-2}y^{-1}(x+y)-2u$.

953　设 $u=(y^2/3x)-\varphi(xy)$，证明 $x^2u_x-xyu_y-y^2=0$.

证　注意 u 满足 $u(t^{-1}x,ty)=(t^3y^2/3x)+\varphi(xy)$，这虽不能归入题 946 的情况，但那里的方法完全可移用于此.

将题 946 的证法推广于证含 2 阶偏导数的等式是很容易的，以下两例可作说明.

954　设 $u=f(y/x)+xg(y/x)$，证明 $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$.

证　因 $u(tx,ty)=At+B$，A，B 与 t 无关，故对 t 求导两次后置 $t=1$ 得出所要证.

955　设 $u=x^a f(y/x)+x^{1-a}g(y/x)$，证明 u 满足(8.3.6)

证　因组成 u 的两项分别为 a 次与 $1-a$ 次齐次函数，故皆满足(8.3.6)，因此 u 亦必满足(8.3.6).

若 $u(x,y)$ 由某个隐函数方程给定，则须经仔细观察才能确定 u 是否具某种"齐次性".

956　设 $F(x+uy^{-1},y+ux^{-1})=0$，证明 $xu_x+yu_y=u-xy$.

证　令 $v=u+xy$，则 $F(v/y,v/x)=0$，这推出 $v(tx,ty)=tv(x,y)$，故 $xv_x+yv_y=v$，以 $v=u+xy$ 代入即得所要证.

957　设 $x=uf(y/u)$，证明 $u_{xx}u_{yy}=u_{xy}^2(x^2+y^2\neq 0)$.

证　如同上题之证，可由齐次性得 $xu_x+yu_y=u$. 进而有 $xu_{xx}+yu_{xy}=0$，$xu_{xy}+yu_{yy}=0$. 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时必定 $u_{xx}u_{yy}=u_{xy}^2$.

958　设 $x^2=vw$，$y^2=uw$，$z^2=uv$，$f(x,y,z)=F(u,v,w)$，证明 $xf_x+yf_y+zf_z=uF_u+vF_v+wF_w$.

提示：注意 $f(tx,ty,tz)=F(tu,tv,tw)$.

8.4　中值公式之证明

本书已不止一次提到微分中值定理了. 对于中值定理的重要性，你从微积分课程中大概已获得足够的认识. 尽管如此，你对这个定理很可能仍然喜忧参半：它引出一系列称为"中值公式"的问题让你伤透脑筋. 不过，你读了本节之后会轻松许多.

中值问题的一般提法如下：给定$[a,b]$上的函数 $f(x)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(a,b,\xi)=0$，F 是某个与 f 有关的表达

式. 若 F 仅含 $f'(\xi)$,则通常用 Rolle 定理、Lagrange 或 Cauchy 中值定理来证明;若 F 含 $f''(\xi)$ 或更高阶的导数,则可考虑重复运用 Rolle 定理、Lagrange 中值定理,或者应用 Taylor 公式. 下面分三种情况加以说明.

8.4.1 应用 Rolle 定理

本段假定 $f,g\in C[a,b]$,且 f,g 在 (a,b) 内可微. 我们从一个典型的例子开始.

959 设 $g'(x)\neq 0(a<x<b)$. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$: $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证法分析 待证等式有点象 Cauchy 公式,但细察之后,你会明白 Cauchy 公式是用不上的. 最好是将待证等式变换成

$$f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)g(\xi)-f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(b)=0.$$

这就看出,要证者为 $\varphi'(\xi)=0$, 此处 $\varphi(x)=f(x)g(x)-f(a)g(x)-f(x)g(b)$. 依据 Rolle 定理,余下的事情只是验证 $\varphi(a)=-f(a)g(b)=\varphi(b)$ 罢了.

以上证法可归纳为以下一般模式:

(i) 适当变换待证等式,使之能表成 $\varphi'(\xi)=0$,φ 是由观察确定的函数.

(ii) 验证 $\varphi(a)=\varphi(b)$.

(iii) 应用 Rolle 定理推断有 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$.

实际上只有步骤(i) 是关键的,通常也是难点所在. 至于(ii)(iii),往往是"例行公事"而已.

960 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$: $f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

证 若将要证等式改写成

$$f(\xi)\int_b^\xi g(x)\mathrm{d}x+g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=0,$$

则你较易看出它相当于 $\varphi'(\xi)=0,\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t$. 余下的事情就很简单了.

961 设 $f(a)=f(b)=0$,证明 $\exists\xi\in(a,b):f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

证 此题难处在于不能求得 $f'(x)+f(x)g'(x)$ 的原函数. 但若将要证等式改写成 $e^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]=0$,则立即看出应取 $\varphi(x)=f(x)e^{g(x)}$,然后用 Rolle 定理.

在上题条件下,类似可证 $\exists\xi\in(a,b):f(\xi)=2f(\xi)g'(\xi)$.

962 设 $a<c<b,f(a)f(b)>0,f(a)f(c)<0$,证明 $\exists\xi\in(a,b):f'(\xi)=f(\xi)$.

提示:指明有 $a<\alpha<c<\beta<b:f(\alpha)=f(\beta)=0$;然后对 $\varphi(x)=e^{-x}f(x)$ 用 Rolle 定理.

963 证明广义 Rolle 定理:若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微 $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to b}f(x)$,则 $\exists\xi\in(a,b):f'(\xi)=0$.

证 取 $(0,1)$ 上的函数 $\varphi(t)$,使 $\varphi(t)\to a(t\to 0),\varphi(t)\to b(t\to 1),\varphi'(t)>0$(这样的 φ 容易直接构成). 令 $g(t)=f(\varphi(t))$,定义 $g(0)=g(1)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$,则 $\exists\tau\in(0,1):g'(\tau)=f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)=0$. 于是 $\xi=\varphi(\tau)\in(a,b),f'(\xi)=0$.

964 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可微,$0\leqslant f(x)\leqslant x/(1+x^2)$. 证明 $\exists\xi>0:f'(\xi)=(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2$.

证 关键在于看出 $(x/(1+x^2))'=(1-x^2)/(1+x^2)^2$,这样就知应令 $\varphi(x)=f(x)-x(1+x^2)^{-1}$,然后应用广义 Rolle 定理.

若要证等式含 $f''(\xi)$，则可能要两次应用 Rolle 定理，亦可能要对 $f'(x)$ 用 Rolle 定理. 以下设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次可微.

965 设 $f(a)=f(b)=g(a)=0$，证明 $\exists\, \xi \in (a,b)$：$f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$.

证 待证等式可写成 $\varphi''(\xi)=0$，$\varphi(x)=f(x)g(x)$. 因 $\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi'(a)=0$，必有 $c\in(a,b)$：$\varphi'(c)=0$. 再在 $[a,c]$ 上对 $\varphi'(x)$ 用 Rolle 定理即得所要证.

966 设 $f(a)=f(b)$，$g(a)=g(b)$，证明 $\exists\, \xi\in(a,b)$：

$$\begin{vmatrix} f''(\xi) & g''(\xi) \\ f(\xi)-f(a) & g(b)-g(\xi) \end{vmatrix} = 2f'(\xi)g'(\xi).$$

证 将要证等式改写成：

$f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(b)-f(a)g''(\xi)=0$，

即看出应令 $\varphi(x)=f(x)g(x)-f(x)g(b)-f(a)g(x)$. 不难验证 $\varphi'(a)=\varphi'(b)=0$，于是对 $\varphi'(x)$ 用 Rolle 定理得所要证.

967 设过点 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的弦与 $y=f(x)$ 相交，证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$f''(\xi)=0$.

提示：指明 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-[f(b)-f(a)](b-a)^{-1}(x-a)$ 在 $[a,b]$ 上有三个零点.

968 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 n 次可微，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$f(x_i)=0\ (0\leqslant i\leqslant n)$. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$f^{(n)}(\xi)=0$.

8.4.2 应用 Lagrange 或 Cauchy 中值定理

本段中设 $f,g\in C[a,b]$，且 f,g 在 (a,b) 内可微. 若待证等式 $F(a,b,\xi)=0$ 中不含 ξ 的部分可表为 $[f(b)-f(a)]/[g(b)-g(a)]$，则你会意识到该用 Cauchy 中值定理了，而当 $g(x)=x$ 时则是用 Lagrange 中值定理.

969　设 $0<a<b$，证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln(b/a)$.

证　将含 a,b 的式子移至一边，要证等式为：

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\xi^{-1}},$$

故知对 f 与 $g(x)=\ln x$ 用 Cauchy 定理即可.

970　设 $0<a<b$，证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$be^a-ae^b=(b-a)(1-\xi)e^\xi$.

提示：对 $f(x)=x^{-1}e^x$，$g(x)=x^{-1}$ 用 Cauchy 定理.

971　设 $0<a<b$，证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=(b-a)[\xi f'(\xi)-f(\xi)]$.

提示：这是题 970 的一般化.

972　证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$：$b^nf(b)-a^nf(a)=(b-a)\xi^{n-1}[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]$.

提示：对 $x^nf(x)$ 应用 Lagrange 中值定理.

若要证等式含两个中值 ξ,η，则多半是对两对函数 (f,g) 与 (f,h) 分别用 Cauchy 中值定理的结果：

$$[g(b)-g(a)]\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=f(b)-f(a)$$

$$=[h(b)-h(a)]\frac{f'(\eta)}{h'(\eta)}. \quad (8.4.1)$$

973　设 $0<a<b$，证明 $\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$：$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证　将要证等式改写成：

$$(b-a)f'(\xi)=(b^2-a^2)\frac{f'(\eta)}{2\eta}. \quad (8.4.2)$$

由 Lagrange 中值定理，有 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(b)-f(a)=(b-$

$a)f'(\xi)$；由 Cauchy 中值定理，有 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(b)-f(a)=(b^2-a^2)f'(\eta)/2\eta$. 这样的 ξ,η 正满足(8.4.2).

974 设 $0<a<b$, $f'(x)\neq 0(a<x<b)$. 证明 $\exists\ \xi,\eta\in(a,b)$: $ab(b-a)^{-1}\ln(b/a)=\eta^2 f'(\eta)/\xi f'(\xi)$.

提示：将要证等式化为(8.4.1)的形状：

$$(\ln b-\ln a)\frac{f'(\xi)}{\xi^{-1}}=(b^{-1}-a^{-1})\frac{f'(\eta)}{-\eta^{-2}}.$$

含三个中值的情况可类似处理.

975 设 $0<a<b$，证明 $\exists\ \xi,\eta,\zeta\in(a,b)$: $2\xi^{-1}f'(\xi)=(a^2+b^2)\eta^{-3}f'(\eta)=4(b^2-a^2)^{-1}\zeta f'(\zeta)\ln(b/a)$.

证 将要证等式改写成：

$$(b^2-a^2)\frac{f'(\xi)}{2\xi}=(b^4-a^4)\frac{f(\eta)}{4\eta^3}=(\ln b-\ln a)\frac{f'(\zeta)}{\zeta^{-1}}.$$

与(8.4.1)对照看出，平行地应用三次 Cauchy 中值定理即得所要证.

你来解类似的问题：

976 设 $0<a<b$，证明 $\exists\ \xi,\eta,\zeta\in(a,b)$: $3f'(\xi)=(a^2+ab+b^2)\eta^{-2}f'(\eta)=b\sqrt{\zeta}f'(\zeta)/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

8.4.3 应用 Taylor 公式

设 $f\in C^2[a,b]$, $c=(a+b)/2$, $h=(b-a)/2$(参照 7.4). Taylor 公式

$$f(x)=f(y)+f'(y)(x-y)+2^{-1}f''(\xi)(x-y)^2 \tag{8.4.3}$$

本身就是一个中值公式，其中 $x,y\in[a,b]$，ξ 介于 x,y 之间，适当地选取 x,y(通常取 x,y 为 a,b,c 中的某两个)代入 8.4.3，化简后可能得出所要证的等式.

977 设 $f(c)=0$，证明 $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f''(\xi)=4[f(a)+f(b)]/(b-a)^2$.

证 在(8.4.3)中取 $x=c\pm h, y=c$ 得：

$f(c\pm h)=\pm f'(c)h+2^{-1}f''(\xi_\pm)h^2, \xi_\pm\in(a,b)$.

由此得 $h^{-2}[f(a)+f(b)]=2^{-1}[f''(\xi_+)+f''(\xi_-)]=f''(\xi)$，$\xi$ 是介于 ξ_+ 与 ξ_- 之间的某点(参考题 832 之证).

不必设 $f(c)=0$，仿上题你能证.

978 证明 $\exists\ \xi\in[a,b]$：$4[f(a)+f(b)-2f(c)]=(b-a)^2f''(\xi)$.

979 证明 $\exists\ \xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

证 在(8.4.2)在中取 $x=b$ 然后两边对 y 积分得：

$$f(b)(b-a)=2\int_a^b f(y)\mathrm{d}y-f(a)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi_y)(b-y)^2\mathrm{d}y;$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}=-\frac{1}{4}\int_a^b(b-x)^2f''(\xi_x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{f''(\xi)}{4}\int_a^b(b-x)^2\mathrm{d}x=-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3,$$

其中 $\xi\in[a,b]$ 由积分中值定理得出.

980 证明 $\exists\ \xi\in[a,b]$：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(c)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$.

证 在(8.4.3)中取 $y=c$ 并对 x 积分得：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(c)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi_x)(x-c)^2\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)f(c)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,$$

最后一步的理由如同上题之证.

981 设 $f \in C^3[a,b]$, $f'(c)=0$. 证明 $\exists\ \xi \in (a,b)$: $f'''(\xi) = 24[f(b)-f(a)](b-a)^{-3}$.

证 用在 $x=c$ 展开的 3 阶 Taylor 公式：

$$f(c \pm h) = f(c) + \frac{1}{2}f''(c)h^2 \pm \frac{1}{6}f'''(\xi_\pm)h^3, \xi_\pm \in (a,b);$$

$$f(b) - f(a) = \frac{h^3}{6}[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)] = \frac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi),$$

$\xi \in (\xi_-, \xi_+)$.

982 设 $f \in C^3[a,b]$, $f(a)=f(b)$. 证明 $\exists\ \xi \in (a,b)$: $f'''(\xi) = -24f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{-2}$.

提示：如同上题用在 $x=c$ 展开的 3 阶 Taylor 公式.

8.5 积分等式之证明

你对证明积分等式应不陌生，例如在 8.1，8.2，8.4 节中就多次遇到这类问题. 本节主要考虑那些适于用积分学本身的方法证明的积分等式.

8.5.1 定积分问题

设要证明积分等式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x, \tag{8.5.1}$$

可考虑如下证法(参考 8.1.1)：

(i) 变换两积分之一，如 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，利用变量代换、分段积分或分部积分等手段(多半要综合地使用)，将其化为 $\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 分别变换(8.5.1) 之两端使之化为相同.

最好以例题来说明. 下面假定所出现的积分皆存在.

983 证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]\mathrm{d}x$(参照 4.2.2).

证 首先将要证等式化为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

显然,上式右边通过代换 $t = a + b - x$ 即化为左边.

984 设 $c = (a+b)/2, f(c+x) = f(c-x)$,证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$(参照(8.4.8).

证 只要证$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. 为此仍用上题之证中的代换 $f = a + b - x = 2c - x$:

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(2c-t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(c+c-t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^c f(c-c+t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t.$$

985 设 $a < \tau < b, f(\tau + x) = f(\tau - x)$,证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_\tau^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{2\tau-b} f(x)\mathrm{d}x.$

提示:类似于上题,用代换 $t = 2\tau - x$.

986 设 $0 < a < b$, 证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b\left[f(x) + \frac{ab}{x^2}\cdot f\left(\frac{ab}{x}\right)\right]\mathrm{d}x.$

证 只需指出,用代换 $t = ab/x$ 能得出:

$$\int_a^b \frac{ab}{x^2} f\left(\frac{ab}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

987 证明$\int_1^a f\left(x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}(a > 0).$

证 首先用代换 $t = x^2$ 变换左边积分:

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

于是只要证：

$$\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

为此，只要对上式右边积分用代换 $x=a^2/t$ 即可.

988 设 $a,b>0$，积分 $\int_0^{\infty} f(x^2)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明

$$a\int_0^{\infty} f\left(\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} f(x^2)\mathrm{d}x. \tag{8.5.2}$$

证 令 $y=ax-bx^{-1}$，则

$$\int_0^{\infty} f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(y^2)\left(a+\frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

对照(8.5.2)看出只需证：

$$a\int_0^{\infty} f\left(\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right)\mathrm{d}x=b\int_0^{\infty} f\left(\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

为此在左边积分中作代换 $at=b/x$ 即可.

8.5.2 重积分问题

涉及重积分的等式证明题经常出现这样的情况：等式两端是不同种类的积分. 显然，只有化为同类积分，才可能判定两边是否相等. 因此问题的关键在于转化积分. 你自然会联想到第五章所述的种种转化方法.

989 证明 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(t)\sqrt{2-t^2}\mathrm{d}t.$

证 用代换 $t=x+y, s=x-y$ 将圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 变为圆 $t^2+s^2\leqslant 2$，而 $\dfrac{D(t,s)}{D(x,y)}=2$，于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{t^2+s^2\leqslant 2} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(t)\sqrt{2-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

990 设 $a>0$，证明

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{2a} f(t)(2a-|t|)\mathrm{d}t.$$

证 用代换 $t=x-y, s=x+y$ 化正方形 $|x|\leqslant a, |y|\leqslant a$ 为正方形 $|t|+|s|\leqslant 2a$（这可由边界的变换看出），于是

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{|t|+|s|\leqslant 2a} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2a}^{2a} f(t)\mathrm{d}t\int_{|t|-2a}^{2a-|t|}\mathrm{d}s = \int_{-2a}^{2a} f(t)(2a-|t|)\mathrm{d}t.$$

991 设 D 是简单闭曲线 L 所围区域，$\boldsymbol{n}$ 是 L 之外法矢，$\triangle u = u_{xx}+u_{yy}$，证明

$$\iint_D (u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_D u\triangle u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 等式同时含有二重积分与曲线积分，应用 Green 公式是不可避免的：

$$\int_L u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \int_L u(u_x\mathrm{d}y - u_y\mathrm{d}x)$$

$$= \iint_D [(uu_x)_x + (uu_y)_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (u_x^2+u_y^2+u\triangle u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注 上面用到 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}s = \{\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x\}$（参看题 586）。

与上题对应的 3 维问题是：

992 设 V 是简单闭曲面 S 所围区域，$\boldsymbol{n}$ 是 S 之单位外法矢，$u\in C^2$，证明

$$\iiint_V (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}v = \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_V u\triangle u\mathrm{d}v.$$

证 与上题相对应，三重积分与曲面积分同时出现不可避免地导致应用 Gauss 公式：

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iint_S u\nabla u\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla\cdot(u\nabla u)\mathrm{d}v$$

$$= \iiint_V [(\nabla u)^2 + u\triangle u]\mathrm{d}v.$$

用同样的方法，你可以解类似的问题：

993 设 $V,S,\boldsymbol{n}$ 同上题，$u,v\in C^2$，证明

$$\iint_S\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = \iiint_V (v\triangle u - u\triangle v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

994 设 $V,S,\boldsymbol{n}$ 同题 992，原点不在 $V+S$ 上，$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，证明 $\iint_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = 2\iiint_V \frac{\mathrm{d}v}{r}$.

证 代入 $\cos(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) = r^{-1}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$，然后用 Gauss 公式：

$$\iint_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \iint_S \frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$$

$$= \iiint_V \nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\mathrm{d}v = 2\iiint_V \frac{\mathrm{d}v}{r}.$$

8.6 杂 题

到此为止，你在大学数学课程中可能遇到的等式证明问题，算是大体浏览过了.不过，仍有各式各样的等式证明题不能归入前面各节；它们的证法各异，本书已近尾声，无法一一对付.此处仅略举数例，以使你观其一斑.

995 设 $x>2$，证明

$\ln(x+2) = 2\ln(1+x) - \ln(x-1) + \ln(x-2)$

$$+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^{2n-1}.$$

证 将要证等式改写成

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+1)^2(x-2)},$$

这样你较易看出这是一个级数求和问题. 令 $y=2/(x^3-3x)$, 并用 6.3.1 中的方法, 易得:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+1)^2(x-2)}.$$

996 证明 $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2x^2}{1+x^2}\right)^n=2\sum_{1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{2n-1}(|x|<1)$.

证 等式两边都是级数, 难以直接比较. 现考虑左边求和后再依 x 的幂展开: 令 $y=2x^2/(1+x^2)$,

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{y^n}{n}=-\ln(1-y)=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$=\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)=2\sum_{1}^{\infty}x^{4n-2}/(2n-1).$$

997 证明 $\int_0^1 x^{x}\mathrm{d}x=\sum_{1}^{\infty}n^{-n}$.

证 这是一个"积分 - 级数"问题, 通常应考虑适当展开被积函数然后逐项积分(参考 6.4.4):

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-x\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x\ln x)^n\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}t^ne^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

998 设 $f(x)=\sum_{0}^{\infty}a_nx^n(|x|<\infty)$, $a_n>0$, $\sum_{0}^{\infty}a_nn!$ 收敛. 证明 $\int_0^{\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{0}^{\infty}a_nn!$.

证 形式上看, 这似乎很简单:

$$\int_0^{\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sum_{0}^{\infty}a_nx^ne^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_0^\infty a_n \int_0^\infty x^n e^{-x} \mathrm{d}x = \sum_0^\infty a_n n!.$$

问题在于未加证明地用了等式

$$\int_0^\infty \sum_0^\infty a_n x^n e^{-x} \mathrm{d}x = \sum_0^\infty \int_0^\infty a_n x^n e^{-x} \mathrm{d}x. \tag{8.6.1}$$

用微分法可证 $x^n e^{-x} \leqslant n!(x > 0)$，因此 $a_n x^n e^{-x} \leqslant a_n n!$，这推出 $\sum a_n x^n e^{-x}$ 对 $0 < x < \infty$ 一致收敛. 于是

$$\int_0^A \sum_0^\infty a_n x^n e^{-x} \mathrm{d}x = \sum_0^\infty a_n \int_0^A x^n e^{-x} \mathrm{d}x (A > 0). \tag{8.6.2}$$

又由 $\int_0^A x^n e^{-x} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!$ 推出(8.6.2)右端级数对 $A > 0$ 一致收敛，因此(8.6.2)两边可令 $A \to \infty$，这正好得出(8.6.1).

999 设 α, β 为非零实数，$\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$. 证明 $\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_0^n \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$，约定 $\binom{\alpha}{0} = 1$.

证 利用二项展开式(参看 1.1)

$$(1+x)^\alpha = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1),$$

结合级数乘法得出：

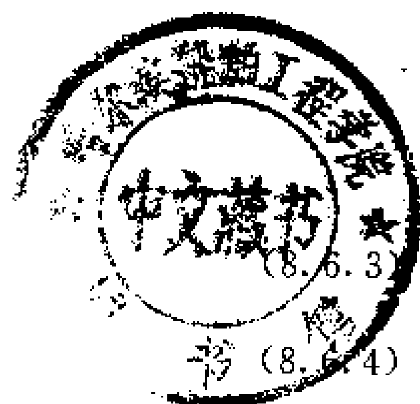
$$\sum_1^\infty \binom{\alpha+\beta}{n} x^n = (1+x)^{\alpha+\beta} = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta$$

$$= \sum_0^\infty \binom{\alpha}{k} x^k \sum_0^\infty \binom{\beta}{j} x^j$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \left[\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} \right] x^n \quad (|x| < 1),$$

比较上式两端得出所要证.

1000 设 $a > 0$. 证明 $y(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t(a^2+t^2)} \mathrm{d}t (x > 0)$ 满足



$a^2y - y'' = c$，c 是某常数.

证　首先形式地写出

$$y' = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2 + t^2}\mathrm{d}t; \tag{8.6.3}$$

$$y'' = -\int_0^\infty \frac{t\sin xt}{a^2 + t^2}\mathrm{d}t. \tag{8.6.4}$$

利用(8.6.4)及 y 的表达式得出(用(1.4.6))

$$a^2y - y'' = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

余下的问题只是说明：$\forall\ x_0 > 0$，(8.6.3)(8.6.4)右端积分关于 $x > x_0$ 一致收敛. (8.6.3)是明显的；对于(8.6.4)，用分部积分：

$$\left|\int_A^B \frac{t\sin xt}{a^2 - t^2}\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{t\cos xt}{x(a^2 + t^2)}\Bigg|_{t=B}^{t=A} + \int_A^B \frac{(a^2 - t^2)\cos xt}{x(a^2 + t^2)^2}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{A}{x_0(a^2 + A)} + \frac{B}{x_0(a^2 + B^2)} + \frac{1}{x_0}\int_A^B \frac{\mathrm{d}t}{a^2 + t^2} \to 0\ (A, B \to \infty),$$

由此得出所要结论.